Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Soluzioni del foglio di Esercizi n. 3.
A cura di Francesca Leonardi e Paolo Piazza

**Esercizio 1.** Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione $n$. Fissiamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ con coordinate associate $\underline{x}$. Sia $U$ un sottospazio di dimensione $n-1$ di equazioni cartesiane

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

**1.1.** Dare le coordinate di un generatore per il sottospazio di dimensione 1 uguale a $U^\perp$.
Sia in particolare $(V, <\,,\,>) = (\mathbb{R}^6, \bullet)$ con base standard fissata e sia $U$ l'iperpiano di equazioni

$$x_1 + \cdots + x_6 = 0$$

**1.2.** Determinare la matrice associata nella base standard all'operatore di proiezione ortogonale su $U$.
*Suggerimento:* siate furbi.
**Soluzione esercizio 1.**
**1.1.** Sia $U$ un sottospazio di dimensione $n-1$ di equazione cartesiana

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

Il vettore $\underline{a}$ di coordinate $(a_1, \ldots, a_n)$ è non nullo e per ogni $\underline{x} \in U$ di coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ si ha

$$< \underline{a}, \underline{x} >= 0$$

dato che $\mathcal{B}$ è una base ortonormale e quindi $< \underline{a}, \underline{x} >= a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$. Ora $U^\perp$ ha dimensione $n-(n-1) = 1$ ed è generato da un unico vettore nullo. Concludiamo che

$$\mathrm{Span}(\underline{a}) = U^\perp.$$

Nel caso particolare in cui $(V, <\,,\,>) = (\mathbb{R}^6, \bullet)$ (con base standard fissata) e $U$ è l'iperpiano di equazioni

$$x_1 + \cdots + x_6 = 0$$

troviamo che il vettore $\underline{y} = (1, \ldots 1)$ è un generatore per $U^\perp$.
**1.2.** Abbiamo appena trovato una base per il sottopsazio $U^\perp$, che è di dimensione 1; è più veloce calcolare prima la matrice della proiezione ortogonale su $U^\perp$ e poi usare l'identità provata dell'Esercizio 3 del Foglio 2

$$\mathrm{Id}_V = P_U + P_{U^\perp}$$

per dedurre la matrice associata a $P_U$. Calcoliamo le proiezioni su $U^\perp$ dei vettori della base standard $\mathcal{B} = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_6)$:

$$P_{U^\perp}\underline{e}_j = \frac{< \underline{y}, \underline{e}_j >}{< \underline{y}, \underline{y} >}\underline{y} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \forall j = 1, \ldots, 6.$$

La matrice associata a $P_{U^\perp}$ nella base standard $\mathcal{B}$ [1] ha per colonne i vettori $P\underline{e}_j$:

$$[P_{U^\perp}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

dove utilizziamo la notazione $[P_{U^\perp}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ al posto della notazione di Sernesi $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(P_{U^\perp})$. Utilizzando l'identità che abbiamo richiamato troviamo

$$[P_U]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} - [P_{U^\perp}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_6 - [P_{U^\perp}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 5 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 5 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 2.**
**2.1.** Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo oppure uno spazio vettoriale hermitiano. Sia $T$ un endomorfismo. Abbiamo visto (nel caso euclideo, ma esattamente la stessa dimostrazione funziona nel caso hermitiano) che esiste unico un operatore $T^*$, detto aggiunto di $T$, tale che

$$< T\underline{v}, \underline{w} > = < \underline{v}, T^*\underline{w} >\,, \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V. \tag{1}$$

Abbiamo anche visto che se $\mathcal{G}$ è una base ortonormale allora

$$M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(T^*) = (M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(T))^T \text{ se } (V, <\,,\,>) \text{ è } \textit{euclideo}$$

e la stessa dimostrazione stabilisce che

$$M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(T^*) = (\overline{M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(T)})^T \text{ se } (V, <\,,\,>) \text{ è } \textit{hermitiano.}$$

Fissiamo una *qualsiasi* base $\mathcal{B}$. Sia $A$ la matrice associata a $T$ in questa base, $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$, e sia $S$ la matrice associata a $<\,,\,>$ in questa base, $S := A^{\mathcal{B}}_{<\,,\,>}$.
Sia infine $A^*$ la matrice dell'operatore aggiunto $T^*$ nella base $\mathcal{B}$, $A^* = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T^*)$ .
*Scrivere una formula che esprima $A^*$ in termini di $S$ ed $A$.*
(Le formule sono diverse a seconda che $(V, <\,,\,>)$ sia uno spazio vettoriale euclideo oppure uno spazio vettoriale hermitiano.)
*Suggerimento:* scrivere (1) in coordinate.
**2.2** Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo. Completare le seguenti proposizioni e dimostrarle:
**Proposizione.** $T$ è un operatore ortogonale se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione......
**Proposizione.** $T$ è un operatore simmetrico se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione......
**2.3** Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale hermitiano. Completare le seguenti proposizioni e dimostrarle:
**Proposizione.** $T$ è un operatore unitario se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione......
**Proposizione.** $T$ è un operatore hermitiano se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione......

[1] scelta quindi come base di partenza e di arrivo

**Soluzione esercizio 2.1** Vediamo la dimostrazione nel caso in cui $(V, <,>)$ sia uno spazio vettoriale hermitiano. Sia $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ una base qualsiasi di $V$, $\underline{v}, \underline{w} \in V$ rispettivamente di coordinate $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ nella base $\mathcal{B}$. La (1) si scrive come:

$$(A\underline{x})^T S\overline{\underline{y}} = \underline{x}^T S\overline{A^*\underline{y}}$$

cioè

$$\underline{x}^T A^T S\overline{\underline{y}} = \underline{x}^T S\overline{A^*}\overline{\underline{y}}$$

Siccome questa uguaglianza deve valere per ogni coppia di vettori, devono essere uguali le matrici:

$$A^T S = S\overline{A^*},$$

da cui otteniamo

$$A^* = \overline{S^{-1}A^T S}.$$

Il caso reale è simile, ma questa volta la (1) si riscrive come

$$(A\underline{x})^T S\underline{y} = \underline{x}^T SA^*\underline{y}$$

da cui si ottiene con semplici passaggi

$$A^* = S^{-1}A^T S.$$

**2.2. Proposizione.** $T$ è un operatore ortogonale se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione $A^T S = SA^{-1}$.
*Dimostrazione.* $T$ è ortogonale se e solo se $T^*T = \mathrm{Id}_V$. Dall'esercizio precedente si ottiene quindi che $T$ è ortogonale se e solo se $S^{-1}A^T SA = I_n$ che riscriviamo come $A^T S = SA^{-1}$.
Volendo procedere direttamente abbiamo che $T$ è ortogonale se e solo se

$$< T\underline{v}, T\underline{w} >=< \underline{v}, \underline{w} > \qquad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Procedendo come abbiamo fatto prima, se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{w}$ ha coordinate $\underline{y}$, l'equazione si riscrive come

$$(A\underline{x})^T S(A\underline{y}) = \underline{x}^T S\underline{y},$$

che equivale a

$$\underline{x}^T A^T S(A\underline{y}) = \underline{x}^T S\underline{y}.$$

Per arbitrarietà di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ l'uguaglianza vale se e solo se

$$A^T SA = S$$

che è equivalente a

$$A^T S = SA^{-1}.$$

N. B. : Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che gli operatori ortogonali sono invertibili. Questo risultato è una conseguenza immediata del fatto che $T$ è ortogonale se e solo se manda basi ortonormali in basi ortonormali.
**Proposizione.** $T$ è un operatore simmetrico se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione $A^T S = SA$.
*Dimostrazione.* Per definizione $T$ è simmetrico se e solo se $T = T^*$ se e solo se $A = S^{-1}A^T S$ se e solo se $SA = A^T S$ come si voleva.
Volendo procedere direttamente si ha che $T$ è simmetrico se e solo se

$$< T\underline{v}, \underline{w} >=< \underline{v}, T\underline{w} > \qquad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{w}$ ha coordinate $\underline{y}$, richiediamo che

$$(A\underline{x})^T S\underline{y} = \underline{x}^T SA\underline{y},$$

che equivale a

$$\underline{x}^T A^T S\underline{y} = \underline{x}^T SA\underline{y}.$$

Per l'arbitrarietà di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ tale condizione è verificata se e solo se

$$A^T S = SA.$$

**2.3. Proposizione.** $T$ è un operatore unitario se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione $A^T S = S\overline{A}^{-1}$.

*Dimostrazione.* $T$ è unitario se e solo se $T^*T = \mathrm{Id}_V$. Quindi $T$ è unitario se e solo se $A^*A = I_n$ se e solo se $\overline{S^{-1}A^T S}A = I_n$ se e solo se $S^{-1}A^T S\overline{A} = I_n$ se e solo se $A^T S = S\overline{A}^{-1}$, come si voleva.

Volendo procedere direttamente si ha che $T$ è un operatore unitario se e solo se

$$< T\underline{v}, T\underline{w} >=< \underline{v}, \underline{w} > \qquad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Questa condizione è equivalente a

$$(A\underline{x})^T S\overline{(A\underline{y})} = \underline{x}S\overline{\underline{y}}$$

che equivale a

$$\underline{x}^T A^T S\overline{A}\overline{\underline{y}} = \underline{x}^T S\underline{y}.$$

Per l'arbitrarietà di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ otteniamo che $T$ è unitario se e solo se

$$A^T S = S\overline{A}^{-1}.$$

**Proposizione.** $T$ è un operatore hermitiano se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione $S\overline{A} = A^T S$.

*Dimostrazione.* Per definizione $T$ è un operatore hermitiano se e solo se $T = T^*$, cioè se e solo so $A = A^*$. Per quanto visto al punto **2.1** otteniamo che questa condizione è equivalente a

$$A = \overline{S^{-1}A^T S},$$

cioè

$$S\overline{A} = A^T S.$$

Anche in questo caso potremmo procedere direttamente.

**Esercizio 3.** Sia $V$ lo spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $[-\pi, \pi]$ in $\mathbb{R}$. Sia $W$ il sottospazio vettoriale di $V$ definito da $W = \mathrm{Span}(\sin x, \cos x)$.

(i) Dimostrare che la dimensione di $W$ è 2.

(ii) Dimostrare che la forma $<,>: W \times W \to \mathbb{R}$ definita da

$$< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

è un prodotto scalare definito positivo e che $\{\sin x, \cos x\}$ è una base ortogonale per tale prodotto scalare.

(iii) Verificare che $\{\sin x, \sin(x + \frac{\pi}{4})\}$ è una base di $W$. Ortonormalizzare tale base con il procedimento di Gram-Schmidt rispetto al prodotto scalare di (ii).

**Soluzione esercizio 3.**
(i) Sia $a \sin x + b \cos x = \underline{0}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ (qui $\underline{0}$ è la funzione identicamente nulla). Valutando in $x = 0$ si ha $b = 0$ e in $x = \frac{\pi}{2}$ si ha $a = 0$, ossia i due vettori sono indipendenti e $W$ ha quindi dimensione 2.

(ii) La bilinearità segue dalle proprietà dell'integrale e la simmetria è ovvia. Ovviamente se $f = 0$ allora $< f, f >= 0$. Sia

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = 0.$$

Se esistesse $x_0 \in [-\pi, \pi]$ tale che $f(x_0) \neq 0$, allora per continuità esisterebbe un intorno $[-\delta, \delta] \subseteq [-\pi, \pi]$ di $x_0$ su cui $f(x)^2$ è strettamente positiva. Quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \geq \int_{-\delta}^{\delta} f(x)^2 > 0$$

che è assurdo. Perciò $f(x) = 0$.

L'ortogonalità di $\{\sin x, \cos x\}$ segue da

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \ \cos x \ dx = \left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

(iii) Poichè $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$, l'indipendenza dei vettori segue da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ortogonalizziamo $\{\sin x, \sin(x + \frac{\pi}{4}\}$ con Gram-Shmidt. Come primo vettore prendiamo $p_1 = \sin x$. Poi

$$p_2 = \sin(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{< \sin(x + \frac{\pi}{4}), \sin x >}{< \sin x, \sin x >} \sin x =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$$

Si verifica facilmente che $< \sin x, \sin x >=< \cos x, \cos x >= \pi$ da cui la base ortonormale richiesta è

$$q_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \qquad q_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$$

**Esercizio 4.** *Sia $V = \mathbb{C}^2$ con prodotto hermitiano canonico. Sia $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'operatore $L_A$ con*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix}$$

**4.1** *Spiegare perché $T$ è diagonalizzabile con base diagonalizzante ortonormale.*
**4.2** *Determinare una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di $T$.*
**4.3** *Stabilire se tale base è unica.*
**4.4** *Determinare una matrice unitaria $U$ ed una matrice diagonale $\Delta$ tali che $U^{-1}AU = \Delta$*

**Soluzione.**
**4.1** L'operatore è hermitiano, dato che $A = \overline{A}^T$ e dato che stiamo considerando la base standard e il prodotto hermitiano standard di $\mathbb{C}^2$. Per il teorema spettrale per operatori hermitiani, sappiamo che esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da

autovettori di $T$.

**4.2** Il polinomio caratteristico di $T$ è $\lambda^2 - 2\lambda - 2$ che ha radici $1 \pm \sqrt{3}$. Sappiamo che ad autovalori distinti corrispondono autovettori ortogonali. Per determinare una base ortonormale di autovettori basterà allora trovare generatori di norma uno delle rette $V_T(1+\sqrt{3})$ e $V_T(1-\sqrt{3})$. Si ha

$$V_T(1+\sqrt{3}) = \{\underline{z} \in \mathbb{C}^2 \mid (A-(1+\sqrt{3})I)\underline{z} = \underline{0}\} = \{\underline{z} \in \mathbb{C}^2 \mid (1-\sqrt{3})z_1+(1+i)z_2 = 0\}$$

da cui $V_T(1+\sqrt{3}) = \mathbb{C}((1+i), (-1+\sqrt{3}))$. Dato che $V_T(1-\sqrt{3}) = (V_T(1+\sqrt{3}))^\perp$ e dato che

$$(\mathbb{C}((1+i), (-1+\sqrt{3})))^\perp = \mathbb{C}(-(-1+\sqrt{3}), \overline{(1+i)})$$

otteniamo immediatamente che $V_T(1-\sqrt{3}) = \mathbb{C}((1-\sqrt{3}), (1-i))$. Normalizzando otteniamo la base ortonormale di autovettori:

$$\underline{u}_1 = \left(\frac{(1+i)}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}, \frac{(-1+\sqrt{3})}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}\right), \quad \underline{u}_2 = \left(\frac{(1-\sqrt{3})}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}, \frac{(1-i)}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}\right)$$

**4.3** Tale base non è unica: basta considerare la base $\{\underline{u}_2, \underline{u}_1\}$ oppure osservare che per ogni retta ci sono due generatori di norma 1.

**4.4** La matrice $U$ è la matrice che ha come colonne le coordinate della base trovata in 4.2. La matrice $\Delta$ è la matrice diagonale che ha gli autovalori $1+\sqrt{3}$ e $1-\sqrt{3}$ ai posti $d_{11}$ e $d_{22}$ rispettivamente.

**Esercizio 5.** *Sia* $V = \mathbb{R}^2$ *e sia* $S = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

**5.1** *Verificare che l'applicazione* $<\ ,\ >: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da* $<\underline{x}, \underline{y}> = \underline{y}^T S \underline{x}$ *è un prodotto scalare definito positivo.*

**5.2** *Sia* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *l'operatore* $L_A$ *con* $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$. *Stabilire se* $T$ *è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare definito in* **5.1**.

**Soluzione. 5.1** La prima parte dell'esercizio, e cioè che $<\ ,\ >$ è una forma bilineare simmetrica è stata discussa in dettaglio a lezione nel caso generale. Per vedere che è definita positiva possiamo applicare il criterio di Cartesio al polinomio caratteristico per controllare che ci sono due autovalori positivi. Possiamo anche ragionare come segue: la matrice $S$ ha traccia positiva e determinante positivo, quindi i due autovalori reali di $S$ sono entrambi positivi. Quindi la forma bilineare associata ad $S$ è definita positiva.

**5.2** Sappiamo che $T = T^*$ se e solo se $A = A^*$ che vale se e solo se $A = S^{-1}A^T S$. Un rapido calcolo mostra che $A \neq S^{-1}A^T S$; ne segue che $T$ non è autoaggiunto.

**Esercizio 6.** Consideriamo l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito, rispetto ad una base $\mathcal{B}$, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Dire se può esistere un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ in modo tale che $\mathcal{B}$ sia una base ortonormale rispetto a tale prodotto scalare e $T$ sia un operatore simmetrico.

(ii) Dire se può esistere un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ in modo tale che $\mathcal{B}$ sia una base ortonormale rispetto a tale prodotto scalare e $T$ sia un operatore ortogonale.

(iii) Determinare, se esiste, un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ rispetto al quale $T$ è simmetrico[2].

**Soluzione esercizio 6.**
(i)+(ii) Se $T$ fosse un operatore simmetrico (rispettivamente ortogonale) e $\mathcal{B}$ una base ortonormale, allora $A$ dovrebbe essere una matrice simmetrica (rispettivamente ortogonale) [3] ed è evidente che non lo è.

(iii) Denotiamo con

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la matrice di un generico prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Chiaramente deve essere $c = b$. Per quanto richiamato nella nota a fondo pagina, sappiamo che la condizione su $A$ e $S$ affinché $T$ sia simmetrico è

$$\begin{pmatrix} a-b & b-d \\ 2b & 2d \end{pmatrix} = A^t S = SA = \begin{pmatrix} a-b & 2b \\ b-d & 2d \end{pmatrix}$$

da cui $d = -b$. Un prodotto scalare come richiesto deve avere matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -b \end{pmatrix}$$

Resta da imporre la positività. Se $\underline{v}$ ha coordinate $x_1, x_2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, ciò equivale a richiedere

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 - bx_2^2 \geq 0$$

l'uguale valendo se e solo se $\underline{v}$ è il vettore nullo. Aggiungendo e sottraendo $bx_1^2$ possiamo riscrivere il membro a sinistra come

$$(a+b)x_1^2 - b(x_1 - x_2)^2$$

e per avere $ax_1^2 + 2bx_1x_2 - bx_2^2 \geq 0$ basterà scegliere $b < 0$ e $(a+b) > 0$. Una soluzione è ad esempio $(a, b) = (2, -1)$.

**Esercizio 7.** Dimostrare il seguente risultato
**Decomposizione spettrale:** Sia $T$ un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio vettoriale euclideo o hermitiano $(V, <\, , >)$. Siano $V_T(\lambda_1), \ldots, V_T(\lambda_k)$ gli autospazi distinti di $T$ e sia $P_{V_T(\lambda_i)}$ l'operatore di proiezione ortogonale su $V_T(\lambda_i)$. Verificare che vale la seguente identità in End(V):

$$T = \lambda_1 P_{V_T(\lambda_1)} + \cdots + \lambda_k P_{V_T(\lambda_k)}.$$

*Suggerimento:* fissate un'opportuna base dello spazio e verificate che i due membri di questa uguaglianza operano allo stesso modo su questa base.
**Soluzione esercizio 7.** Poiché $T$ è autoaggiunto ha tutti gli autovalori reali; inoltre autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali. Per il Teorema spettrale $T$ è diagonalizzabile tramite una base ortonormale di autovettori. Sia

---

[2]Scrivere la matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ di un generico prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$. Quale è la condizione su $A$ e $B$ affinchè $T$ sia simmetrico oppure ortogonale?

[3]Abbiamo visto che se $S$ è la matrice del prodotto scalare in una base $\mathcal{B}$ allora per la matrice $A^*$ associata a $T^*$ in questa base si ha

$$A^* = S^{-1}\, A^T\, S$$

Quindi $T$ è simmetrico **e** $\mathcal{B}$ è ortonormale se e solo se $A = A^T$. Analogamente $T$ è un isometria **e** $\mathcal{B}$ è ortonormale se e solo se $A^{-1} = A^T$.

$\{\underline{u}_{11}, \ldots, \underline{u}_{1d_1}, \ldots, \underline{u}_{k1}, \ldots, \underline{u}_{kd_k}\}$ una base ortonormale di autovettori con $\{\underline{u}_{i1}, \ldots, \underline{u}_{id_i}\}$ base di $V_T(\lambda_i)$. Segue che

$$P_{V_T(\lambda_j)}\underline{u}_{ih} = \begin{cases} \underline{u}_{ih} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Quindi si ha

$$(\lambda_1 P_{V_T(\lambda_1)} + \cdots + \lambda_k P_{V_T(\lambda_k)})(\underline{u}_{ih}) = \lambda_i \underline{u}_{ih}.$$

D'altra parte $T(\underline{u}_{ih}) = \lambda_i \underline{u}_{ih}$ poichè $\underline{u}_{ih} \in V_T(\lambda_i)$. Quindi

$$(\lambda_1 P_{V_T(\lambda_1)} + \cdots + \lambda_k P_{V_T(\lambda_k)})(\underline{u}_{ih}) = T(\underline{u}_{ih}).$$

Dato che gli operatori lineari sono univocamente determinati dai valori che assumono su una base concludiamo che

$$\lambda_1 P_{V_T(\lambda_1)} + \cdots + \lambda_k P_{V_T(\lambda_k)} = T.$$

**Esercizio 8.** Sia $V$ uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare $<\,,\,>$.
**1.** Verificate che una simmetria ortogonale rispetto ad un sottospazio è un operatore ortogonale in $(V, <\,,\,>)$.
**2.** Verificare che se $P$ è un operatore di proiezione *ortogonale* su un sottospazio $W$, $P \equiv P_W$, allora $P$ è simmetrico.
**Soluzione esercizio 8.1.** Sia $U \leq V$ un sottospazio vettoriale di dimensione $0 \leq k \leq n$. Consideriamo $U^\perp$ e la decomposizione in somma diretta $V = U \oplus U^\perp$. Sia $S_U$ l'operatore di simmetria ortogonale rispetto ad $U$. È chiaro che possiamo fissare una base ortonormale

$$\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k, \underline{u}_{k+1}, \ldots, \underline{u}_n\}$$

con i primi $k$ vettori in $U$ ed i rimanenti $n-k$ in $U^\perp$. Notiamo che

$$S_U \underline{u}_j = \begin{cases} \underline{u}_j & \text{se } 0 \leq j \leq k \\ -\underline{u}_j & \text{se } k < j \leq n \end{cases}.$$

Calcoliamo i prodotti scalari:

$$< S_U \underline{u}_i, S_U \underline{u}_j >= \begin{cases} < \underline{u}_i, \underline{u}_j >= \delta_{i,j} & \text{se } i,j \leq k \text{ oppure } i,j > k \\ - < \underline{u}_i, \underline{u}_j >= 0 & \text{se } i \leq k \text{ e } j > k \text{ oppure } i > k \text{ e } j \leq k \end{cases}.$$

Otteniamo che $(S_U \underline{u}_1, \ldots, S_U \underline{u}_n)$ è ancora una base ortonormale, dunque $S_U$ è un operatore ortogonale.
In alternativa possiamo verificare direttamente che

$$< S_U \underline{v}_1, S_U \underline{v}_2 >=< \underline{v}_1, \underline{v}_2 > \ \forall \underline{v}_1 \underline{v}_2 \in V$$

procedendo come nella soluzione di 8.2.
**8.2.** Per dimostrare che $P$ è simmetrico, ricordando che ogni vettore $\underline{v} \in V$ si decompone in modo unico in $\underline{v} = \underline{w} + \underline{u}$ con $\underline{w} \in W$ e $\underline{u} \in W^\perp$, scriviamo:

$$\begin{aligned} < P\underline{v}_1, \underline{v}_2 > &=< P(\underline{w}_1 + \underline{u}_1), \underline{w}_2 + \underline{u}_2 >=< \underline{w}_1, \underline{w}_2 + \underline{u}_2 >= \\ &=< \underline{w}_1, \underline{w}_2 > + < \underline{w}_1, \underline{u}_2 >=< \underline{w}_1, \underline{w}_2 >, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che $\underline{w}_1 \in W$, $\underline{u}_2 \in W^\perp \Rightarrow < \underline{w}_1, \underline{u}_2 >= 0$;

$$\begin{aligned} < \underline{v}_1, P\underline{v}_2 > &=< \underline{w}_1 + \underline{u}_1, P(\underline{w}_2 + \underline{u}_2) >=< \underline{w}_1 + \underline{u}_1, \underline{w}_2 >= \\ &=< \underline{w}_1, \underline{w}_2 > + < \underline{u}_1, \underline{w}_2 >=< \underline{w}_1, \underline{w}_2 >, \end{aligned}$$

da cui otteniamo che $< P\underline{v}_1, \underline{v}_2 >=< \underline{v}_1, P\underline{v}_2 > \ \forall \underline{v}_1 \underline{v}_2 \in V$, cioè $P$ è simmetrico.

**Esercizio 9.** Consideriamo lo spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \bullet)$. con $\bullet$ il prodotto scalare standard. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Determinare una base **ortonormale** di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ che diagonalizzi questa forma quadratica. Scrivere l'espressione della forma quadratica nelle nuove coordinate. Determinare una base ortonormale rispetto alla quale la forma quadratica si scriva nella sua *forma canonica euclidea.* Determinare infine una base rispetto alla quale la forma quadratica si scriva nella sua *forma canonica affine.*

**Soluzione esercizio 9.** La matrice simmetrica associata alla forma quadratica è

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Per diagonalizzare la forma quadratica basterà determinare una base *ortonormale* di autovettori per $A$. È subito visto che $P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 2)$ e che quindi $A$ ammette gli autovalori $\lambda_1 = \sqrt{2}$, con $m_a(\sqrt{2}) = 1$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, con $m_a(-\sqrt{2}) = 1$, $\lambda_3 = 0$, con $m_a(0) = 2$. Si verifica senza difficoltà che $V_A(\sqrt{2}) = \mathbb{R}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1, 0)$, $V_A(-\sqrt{2}) = \mathbb{R}(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1, 0)$ e $V_A(0) = \mathrm{Span}((-1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$.
Questi 4 vettori costituiscono una base ortogonale di autovettori; la base ortonormale di autovettori cercata è quindi

$$\underline{w}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,,\ \underline{w}_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,,\ \underline{w}_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\,,\ \underline{w}_4 = (0, 0, 0, 1)\,.$$

Se $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ sono le coordinate associate a questa base, allora la forma quadratica si scrive in queste coordinate come

$$\sqrt{2}y_1^2 - \sqrt{2}y_2^2$$

e questa è precisamente la forma canonica euclidea. La forma canonica affine è invece

$$z_1^2 - z_2^2$$

con $\underline{z}$ le coordinate associate alla nuova base

$$\frac{1}{2^{1/4}}\underline{w}_1\,,\ \frac{1}{2^{1/4}}\underline{w}_2\,,\ \underline{w}_3\,,\ \underline{w}_4\,.$$

La soluzione è completa.