Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Foglio di Esercizi n.2.
Consegna il 16/3/2020, ore 11, in Aula II.

Esercizio 1. $\mathbb{R}^3$ con base standard fissata e prodotto scalare standard. Sia W la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare i vettori di W che hanno lunghezza uguale a 2.

Esercizio 2. $\mathbb{R}^3$ con base standard fissata e prodotto scalare standard. Consideriamo il piano σ di equazione cartesiana

$$x + 2y - z = 0$$

(i) Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0) \qquad \underline{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}})$$

costituiscono una base *ortonormale* di σ.
(ii) Decomporre il vettore $\underline{u} = (0,1,2)$ del piano σ nella somma $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 \in \mathrm{Span}(\underline{f}_1)$ e $\underline{u}_2 \in \mathrm{Span}(\underline{f}_2)$.

Esercizio 3. Avete visto con il Prof. De Sole il 3/3/2020 che se $(V, <\,,\,>)$ è uno spazio vettoriale euclideo ed U è un sottospazio vettoriale allora

$$V = U \oplus U^{\perp}\,.$$

Si veda anche Sernesi, Proposizione 17.6.
Sia quindi $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n ed U un suo sottospazio vettoriale di dimensione k.
Sia $\underline{v} \in V$ e sia $\underline{v} = \underline{u} + \underline{u}^{\perp}$ la sua decomposizione secondo $V = U \oplus U^{\perp}$.
(3.1) Verificare che la legge

$$V \ni \underline{v} \to \underline{u} \in V$$

definisce un operatore **lineare** $P_U : V \to V$, detto *proiezione ortogonale su* U. Per definizione $P_U(\underline{v}) = \underline{u}$.
Verificare che la legge

$$V \ni \underline{v} \to \underline{u} - \underline{u}^{\perp} \in V$$

definisce un operatore lineare $S_U : V \to V$ detto *simmetria ortogonale rispetto a* U. Quindi, per definizione, $S_U(\underline{v}) = u - u^{\perp}$.
Analogamente abbiamo

$$P_{U^{\perp}}(\underline{v}) := u^{\perp}\,, \quad S_{U^{\perp}}(\underline{v}) = -\underline{u} + \underline{u}^{\perp}\,,$$

la proiezione ortogonale su $U^{\perp}$ e la simmetria ortogonale rispetto a $U^{\perp}$
Considerate $V = \mathbb{R}^2$, U uguale all'asse x; $\underline{v}$ un vettore di coordinate strettamente positive; su un disegno indicate $P_U(\underline{v})$, $P_{U^{\perp}}(\underline{v})$, $S_U(\underline{v})$, $S_{U^{\perp}}(\underline{v})$.
(3.2) Sia $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k\}$ una base ortonormale di U

Come possiamo esprimere $P_U(\underline{v})$? Si veda nuovamente Sernesi, Proposizione 17.6.
(3.3) Verificare che in $\mathrm{End}(V)$ sussistono le seguenti identità

$$P_U + P_{U^\perp} = \mathrm{Id}_V\,, \quad (P_U)^2 = P_U\,, \quad (P_{U^\perp})^2 = P_{U^\perp} \tag{1}$$

dove $T^2 := T \circ T$ per un operatore $T \in \mathrm{End}(V)$ e dove Id_V denota l'operatore identità: $\mathrm{Id}_V(\underline{v}) = \underline{v}$. Verificate anche che

$$S_U = \mathrm{Id}_V - 2P_{U^\perp}\,; \quad S_{U^\perp} = 2P_U^\perp - \mathrm{Id}_V \tag{2}$$

$$(S_U)^2 = \mathrm{Id}_V\,; \quad (S_{U^\perp})^2 = \mathrm{Id}_V \tag{3}$$

Dopo aver completato queste verifiche, ritrovatele nel vostro disegno in $\mathbb{R}^2$.
(3.4) Verificare che P_U e $P_{U^\perp}$ sono diagonalizzabili con autovalori 1 e 0 e che $V_{P_U}(0) = U^\perp$, $V_{P_U}(1) = U$; $V_{P_{U^\perp}}(0) = U$, $V_{P_{U^\perp}}(1) = U^\perp$.
Verificare che S_U e $S_{U^\perp}$ sono diagonalizzabili con autovalori 1 e -1 e che $V_{S_U}(1) = U$, $V_{S_U}(-1) = U^\perp$; $V_{S_{U^\perp}}(1) = U^\perp$, $V_{S_{U^\perp}}(-1) = U$.
(3.5) Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico. Sia σ il piano generato dai vettori $\underline{v}_1 = (1, -1, 0, 0)$ e $\underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$. Sia P_σ l'operatore di proiezione ortogonale sul piano σ. Determinare la matrice associata a P_σ nella base canonica.

Esercizio 4. Dimostrare che $A \in O(2)$ se e solo se $A = R_\phi$ oppure $A = S_\phi$ con

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad S_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$$

Verificare poi che R_ϕ è diagonalizzabile sui reali se e solo se $\phi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Verificare che S_ϕ è sempre diagonalizzabile sui reali. Descrivere geometricamente questi due operatori.
Suggerimento per la prima parte: imponete che $A^T A = I_2$.
Suggerimento per la descrizione geometrica di S_ϕ: pensate all'esercizio 3.
Inoltre, occorrerà utilizzare le formule trigonometriche

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)\,, \quad \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

Esercizio 5. Sia $\mathbb{R}^4$ con base standard fissata e prodotto scalare standard.
Sia W il sottospazio 2-dimensionale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\underline{g}_1 = (1, 0, 1, 0) \qquad \underline{g}_2 = (0, 1, 0, 1).$$

Si consideri il vettore

$$\underline{h}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Sia U il sottospazio generato dai vettori $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{h}_1$.

(i) Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio W.
(ii) Sia $\underline{h}_2$ l'unico vettore generatore di $U^\perp$ verificante le due condizioni

$$||\underline{h}_2|| = 1 \qquad <\underline{h}_2, \underline{e}_2>\, > 0.$$

Determinare le coordinate di $\underline{h}_2$.
(iii) Verificare che $\underline{h}_1, \underline{h}_2$ costituiscono una base ortogonale di $W^\perp$.
(iv) Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare definito come segue

- W e $W^\perp$ sono sottospazi invarianti per T.
- $T|_W =$ proiezione ortogonale sul vettore $\underline{g}_1$

- $T|_{W^\perp}$ ha la retta $\mathbb{R}(\underline{h}_1 + \underline{h}_2)$ come nucleo e la retta $\mathbb{R}(\underline{h}_2 - \underline{h}_1)$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda = -1$.

Spiegare perché T è ben definito. Determinate la matrice associata a T nella base canonica. (Suggerimento: esiste una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice associata all'operatore T è particolarmente semplice...)

(v) Verificare che il sottospazio S di equazioni

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

è invariante per T [1]. Dire se T ristretto a S è iniettivo.

[1] Questo vuol dire che $T(S) \subset S$. È quindi ben definita la restrizione di T ad S.