Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Foglio di Esercizi n.1.
Consegna il 3/3/2020 in Aula II, ore 11, al Prof. De Sole.
Riconsegna compiti corretti Venerdi' 6/3 in Aula II alle ore 12.10.

Esercizio 1. Consideriamo $\mathbb{R}^{2n}$ con la base standard $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n, \underline{e}_{n+1}, \dots, \underline{e}_{2n}\}$. Sia $b : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ l'applicazione

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_{n+1} + \cdots + x_n y_{2n} - x_{n+1} y_1 - \cdots - x_{2n} y_n$$

Verificare che $b(\, , \,)$ è una forma bilineare e scrivere la matrice associata a b nella base $\mathcal{E}$, denotata $A_b^{\mathcal{E}}$.
Vero o falso: b è antisimmetrica.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$, lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2. Fissiamo la base standard $\mathcal{E} = \{1, X, X^2\}$.
Dalle proprietà dell'integrale segue che l'applicazione $b : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$b(P, Q) := \int_{-1}^{1} P(t) Q(t) dt$$

definisce una forma bilineare simmetrica. In classe abbiamo calcolato $A_b^{\mathcal{E}}$.
Determinare una base per il sottospazio b-ortogonale al vettore $1 + X$.

Esercizio 3. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base standard $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ fissata. Sia $b(\, , \,)$ la forma bilineare definita in coordinate da

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u_1 v_1 - u_2 v_2 + u_3 v_4 + u_4 v_3$$

Abbiamo visto in classe che questa è una forma bilineare simmetrica non-degenere.

(a) Vero o Falso: dato che b è non-degenere, non esistono vettori isotropi.

(b) Utilizzando il concetto di vettore non-isotropo e di b-ortogonale ad un vettore non-isotropo, costruite una base $\mathcal{K} = \{\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3, \underline{k}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\, , \,)$.
(Suggerimento: seguite la dimostrazione del Teorema di Diagonalizzazione. Cominciate quindi con il fissare un vettore non-isotropo $\underline{k}_1$; determinate poi

$$\underline{k}_1^{\perp_b} \equiv (\mathbb{R}\underline{k}_1)^{\perp_b} := \{\underline{v} \in \mathbb{R}^4 \mid b(\underline{v}, \underline{k}_1) = 0\}$$

Come dovete scegliere $\underline{k}_2$? .....)

(f) Determinare una base $\mathcal{F}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $A_b^{\mathcal{F}}$ sia nella forma di Sylvester.

(g) Determinare equazioni cartesiane di due sottospazi W_+ e W_- tali che la restrizione di b a W_+ (rispettivamente W_-) sia definita positiva (risp. negativa).

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia b una forma bilineare *antisimmetrica.* Osserviamo preliminarmente che per una forma bilineare antisimmetrica ha senso parlare di b-ortogonalità di 2 vettori.

Assumiamo ora che b sia *non-degenere*. Dimostrare che allora esiste k tale che $n = 2k$ ed una base

$$\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k, \underline{\varphi}_1, \ldots, \underline{\varphi}_k\}$$

di V rispetto alla quale

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{vmatrix}$$

dove abbiamo denotato con I_k la matrice diagonale $k \times k$ con tutti 1 sulla diagonale.
Notare che, in particolare, V ha necessariamente dimensione pari.
Suggerimenti.
(i) Cominciate con l'osservare che esistono due vettori $\underline{u}, \underline{w}$ tali che $b(\underline{u}, \underline{w}) = 1$ (e quindi $b(\underline{w}, \underline{u}) = -1$.)
(ii) Considerate ora $\mathrm{Span}(\underline{u}, \underline{w})$: qual è la sua dimensione ?
(iii) Ponete $\underline{f}_1 := \underline{u}$ e $\underline{\varphi}_1 := \underline{v}$.
(iv) Considerate ora $\mathrm{Span}(\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1)^{\perp_b}$; cosa possiamo dire sull'intersezione

$$\mathrm{Span}(\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1) \cap \mathrm{Span}(\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1)^{\perp_b} \text{ ?}$$

(v) Osservate infine che vale la scrittura:

$$\underline{v} = (\underline{v} - b(\underline{f}_1, \underline{v})\underline{\varphi}_1 - b(\underline{\varphi}_1, \underline{v})\underline{f}_1) + (b(\underline{f}_1, \underline{v})\underline{\varphi}_1 + b(\underline{\varphi}_1, \underline{v})\underline{f}_1)\,.$$

(vi) Concludete....

Vero o Falso:
non è possibile diagonalizzare le forme bilineari antisimmetriche.