Geometria Differenziale. a.a. 2018-2019

Prof. Paolo Piazza

Esame scritto del 17 Giugno 2019.

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola : ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	6	
3	7	
4	7	
5	6	
Totale	34	

ATTENZIONE:
- DURATA DELLA PROVA SCRITTA: **3 ORE**
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE SPENTI E IN BORSA
- CON L'ECCEZIONE DEL FORMULARIO NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI

Esercizio 1.
1.1. Verificare che $\sigma : I \to S$ è una linea asintotica di S, superficie regolare orientabile, se e solo se $\sigma''(t) \in T_{\sigma(t)}S$. Dedurne che se r è una retta contenuta in una superficie regolare, allora r è una linea asintotica.
1.2. Sia $\sigma(t) = \phi(u(t), v(t))$ una curva contenuta in una parametrizzazione locale ϕ di S. Verificare che σ è una linea asintotica di S se e solo se $e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0$.
2. Sia ora S la superficie $z = x^3 - 3xy^2$ parametrizzata da $\phi(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$.
2.1. Sia σ la curva di equazione $x - y = z + 2x^3 = 0$. Dopo aver verificato che l'immagine di σ è contenuta in S, decidere se σ è una *linea di curvatura* per S.
2.2. Verificare che S è costituita da punti iperbolici, tranne l'origine che è planare.
2.3. Verificare se esistono v-curve coordinate, $v \to \phi(u_0, v)$, che siano linee asintotiche.

Esercizio 2.
Sia S la superficie regolare parametrizzata da $\phi(u, v) = (u, v, u^2 \log v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $v > 0$.
Ragionando sulla curvatura gaussiana dimostrare che S non è una rigata.

Esercizio 3. Sia S il semicono di equazione $x^2 + y^2 = 2z^2, z > 0$. Sia S' il paraboloide iperbolico di equazione $z = xy$. Si consideri l'applicazione $f : S \to S'$ definita da $S \ni (x, y, z) \longrightarrow (x, yz, xyz) \in S'$. Spiegare perché f è differenziabile. Sia $P = (1, 1, 1) \in S$; determinare una parametrizzazione locale $\phi : U \to S$ di S intorno a P della forma $\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), v)$; considerare la parametrizzazione naturale di S', che è un grafico; denotiamo tale parametrizzazione con ψ.

- determinare le basi indotte da queste parametrizzazioni in $T_P S$ e $T_{f(P)}S'$ rispettivamente;
- determinare la matrice associata a $df_P : T_P S \to T_{f(P)}S'$ rispetto alle basi appena trovate;
- verificare che $\underline{v} := (0, 2, 1) \in T_P S$; calcolare $df_P(\underline{v})$.

Esercizio 4. Sia S la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva del piano xz di equazione $x = 1/z$, $z > 0$.
1. Determinare una parametrizzazione di S.
2. Consideriamo la curva $\mathcal{C}_d$ ottenuta intersecando S con il piano $z = d$. Determinare gli eventuali $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$, tali che $\mathcal{C}_d$ sia una geodetica.
3. Verificare che la curvatura geodetica di $\mathcal{C}_d$ è costante lungo $\mathcal{C}_d$ e dare una formula in termini di d per tale costante.

Esercizio 5.
5.1. Dimostrare **in dettaglio** che lo spazio proiettivo reale $\mathbb{R}P^n$ è una varietà differenziabile reale compatta di dimensione n.
5.2. Definire il fibrato universale su $\mathbb{R}P^n$.