Matematica III

Proff Alberto De Sole e Paolo Piazza

Esame scritto del 21 Gennaio 2019.

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola : ____________________

email: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
5	5	
6	5	
Totale	30	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE SPENTI E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. Consideriamo la funzione di due variabili

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{2-(x^2+y^2)}}{\log x}.$$

1. Determinare l'insieme di definizione di f.
2. Disegnare l'insieme di definizione nel piano cartesiano.
3. Stabilire se l'insieme di definizione è un insieme aperto oppure chiuso oppure né aperto né chiuso.
4. Stabilire se l'insieme di definizione è limitato/illimitato
5. Stabilire se l'insieme di definizione è connesso/non-connesso

Soluzione (incluso il disegno):

Risposta:

1) Dom(f) =

2) Disegno

3) Dom(f): **Aperto** / **Chiuso** / **Nè aperto è chiuso** (cerchiare la risposta corretta)

4) Dom(f): **Limitato** / **Illimitato**

5) Dom(f): **Connesso** / **Non connesso**

Esercizio 2. Consideriamo la funzione $f(x, y)$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y-2x^3-2xy^2}{x^2+y^2+x^2y^2} & \text{per} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Dimostrare (è molto facile) che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + a^2b^2} \leq \frac{1}{a^2 + b^2} \tag{1}$$

2. Studiare la continuità di f in $(0, 0)$ (la disuguaglianza (1) può risultare utile).
3. Studiare la contninuità di f in $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.
4. Studiare la differenziabilità di f in $(0, 0)$.

Soluzione:

Risposta:

2) f è continua in $(0, 0)$? **SI** / **NO** 3) f è continua nei punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$: $\boxed{}$

4) f è differenziabile in $(0, 0)$? **SI** / **NO**

Esercizio 3. Sia $f(x,y)$ la funzione $x^2 + xy + y^2$. Sia Q il quadrato di vertici $\{P_1 = (1,0), P_2 = (0,1), P_3 = (-1,0), P_4 = (0,-1)\}$.

1. Verificare che f ha un unico punto critico P nell'interno Q° del quadrato Q e determinarlo.

2. Scrivere la matrice Hessiana di f nel punto P ed utilizzarla per determinare la natura del punto critico (punto di massimo o minimo relativo, oppure di sella).

3. Spiegare perché f ammette un massimo assoluto ed un minimo assoluto nell'insieme Q.

4. Determinare il massimo ed il minimo assoluti di f nell'insieme Q.

Soluzione:

Risposta:

1) $P = \boxed{}$ 2) Natura di P: **max** / **min** / **sella** 4) Max-Min assoluti: $\boxed{}$

Esercizio 4. Sia $f(x,y) = e^{xy} + 2\sin x - y^2 - \alpha xy$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
1. Provare che in un intorno del punto $(0,1)$ l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$, qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che 0 sia un punto critico per g.
3. Per tali valori di α determinare la natura del punto critico.

Soluzione:

Risposta:

2) $\alpha = \boxed{}$ 3) Natura del punto critico $x = 0$: **max** / **min** / **flesso**

Esercizio 5. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}$. Sia f la funzione $f(x,y) = y(x-1)$.
1. Spiegare perché f è integrabile su D.
2. Calcolare l'area $A(D)$ del dominio D
3. Calcolare l'integrale di f su D: $I = \iint_D y(x-1)dxdy\,.$

Soluzione:

Risposta:

2) $A(D) = \boxed{}$ 3) $I = \boxed{}$

Esercizio 6. Enunciare il Teorema di Gauss-Green.