Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 31/12/20. Soluzioni.

Esercizio 1. Consideriamo $\mathbb{R}^{2n}$ con la base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n, \underline{e}_{n+1}, \dots, \underline{e}_{2n}\}$. Sia $b : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ l'applicazione

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_{n+1} + \cdots + x_n y_{2n} - x_{n+1} y_1 - \cdots - x_{2n} y_n$$

Verificare che $b(\, , \,)$ è una forma bilineare scrivendo $b(\underline{x}, \underline{y})$ nella forma $\underline{y}^T A \underline{x}$.
Vero o falso: b è antisimmetrica e cioè $b(\underline{x}, \underline{y}) = -b(\underline{y}, \underline{x})$

Soluzione. Possiamo verificare a mano che b è bilineare oppure, come suggerito nel testo, ragionare in termini della matrice associata a $b(\, , \,)$ nella base canonica. Nel primo caso si ha $\forall \, t, s \in \mathbb{R}, \forall \underline{x}, \underline{x}', \underline{y}, \underline{y}' \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned}
b(t\underline{x} + s\underline{x}', \underline{y}) &= (tx_1 + sx'_1)y_{n+1} + \cdots + (tx_n + sx'_n)y_{2n} - (tx_{n+1} + sx'_{n+1})y_1 - \dots \\
&\cdots - (tx_{2n} + sx'_{2n})y_n = tx_1 y_{n+1} + \cdots + tx_n y_{2n} - tx_{n+1} y_1 - \cdots - tx_{2n} y_n + \\
&+ sx'_1 y_{n+1} + \cdots + sx'_n y_{2n} - sx'_{n+1} y_1 - \cdots - sx'_{2n} y_n = t(x_1 y_{n+1} + \cdots + x_n y_{2n} - \\
&- x_{n+1} y_1 - \cdots - x_{2n} y_n) + s(x'_1 y_{n+1} + \cdots + x'_n y_{2n} - x'_{n+1} y_1 - \cdots - x'_{2n} y_n) = \\
&= tb(\underline{x}, \underline{y}) + sb(\underline{x}', \underline{y}).
\end{aligned}$$

Nello stesso modo si fa vadere che:

$$b(\underline{x}, t\underline{y} + s\underline{y}') = tb(\underline{x}, \underline{y}) + sb(\underline{x}, \underline{y}').$$

Dunque b è bilineare.
In alternativa, *e preferibilmente*, scriviamo la matrice associata a $b(\, , \,)$ nella base canonica. Si ha:

$$\begin{aligned}
&b(\underline{e}_i, \underline{e}_{i+n}) = 1 \qquad \forall i = 1, \dots, n; \\
&b(\underline{e}_{i+n}, \underline{e}_i) = -1 \qquad \forall i = 1, \dots, n; \\
&b(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = 0 \qquad \forall i, j = 1, \dots, 2n \quad \text{tali che } i \neq j + n \text{ e } j \neq i + n.
\end{aligned}$$

Dunque la matrice associata alla forma bilineare nella base canonica,

$$A_b^{\mathcal{E}} := (a_{ij}) \, , \quad a_{ij} = b(\underline{e}_j, \underline{e}_i)$$

è

$$A_b^{\mathcal{E}} = \begin{vmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{vmatrix}$$

dove I_n denota la matrice identità $n \times n$.
È immediato verificare che

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A_b^{\mathcal{E}} \underline{x}$$

e quindi b è bilineare (dalle proprietà del prodotto righe per colonne).
Rispondiamo infine all'ultimo quesito. È vero che b è antisimmetrica. Per vederlo si può fare il calcolo esplicito e trovare che $b(\underline{x}, \underline{y}) = -b(\underline{y}, \underline{x})$, oppure, preferibilmente, osservare che la matrice associata a b nella base $\mathcal{E}$ è una matrice antisimmetrica:

$$\begin{vmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A_b^{\mathcal{E}} \underline{x} = (\underline{y}^T A_b^{\mathcal{E}} \underline{x})^T = \underline{x}^T (A_b^{\mathcal{E}})^T \underline{y} = \underline{x}^T (-A_b^{\mathcal{E}}) \underline{y} = -b(\underline{y}, \underline{x}).$$

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2n}$ dotato della forma bilineare antisimmetrica b è un esempio di spazio vettoriale simplettico[1]. Gli spazi vettoriali simplettici giocano un ruolo molto importante in Fisica.

Esercizio 2. Consideriamo lo spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^4, \bullet)$, con $\bullet$ il prodotto scalare canonico

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \, .$$

Fissiamo la base canonica $\mathcal{E}$.
Sia $b(\, , \,)$ la forma bilineare simmetrica definita in coordinate da

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_4 + u_4v_3 \tag{1}$$

2.1. Scrivere la matrice associata a $b(\, , \,)$ nella base canonica, $A_b^{\mathcal{E}}$.
Verificare che $b(\, , \,)$ è non degenere.

Soluzione 2.1. b ha matrice simmetrica associata nella base canonica

$$A_b^{\mathcal{E}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} .$$

Poniamo $A := A_b^{\mathcal{E}}$. Si verifica che il determinante di A è diverso da zero (è uguale a 1); ne segue che $rg(b) = 4$ e quindi b è non degenere.

2.2. Definire a partire da $b(\, , \,)$ un endomorfismo simmetrico T in $(\mathbb{R}^4, \bullet)$.

Soluzione 2.2. Consideriamo L_A; L_A ha matrice associata nella base canonica uguale ad A che è simmetrica e quindi, essendo la base canonica ortonormale rispetto a $\bullet$, ne segue che $T := L_A$ è simmetrico in $(\mathbb{R}^4, \bullet)$

2.3. Determinare indice di positività ed indice di negatività di b.

2.4. Trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ costituita da autovettori per T.

2.5. Determinare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ rispetto alla quale $b(\, , \,)$ si scriva in forma diagonale. In altre parole, determinare una base ortonormale $\mathcal{H}$ di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ tale che $A_b^{\mathcal{H}}$ sia diagonale. Determinare una base di Sylvester e cioè una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $A_b^{\mathcal{B}}$ sia nella forma di Sylvester.

Soluzione 2.3 + 2.4 + 2.5.

Consideriamo $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Si verifica facilmente che gli autovalori di A sono 1 e -1 entrambi con molteplicità algebrica 2 (per il teorema spettrale questa è anche la molteplicità geometrica.). Per quanto visto a lezione sappiamo che una base ortonormale di autovettori per L_A, certamente esistente per il teorema spettrale, diagonalizza simultaneamente $b(\, , \,)$ e L_A. In tale base la matrice associata a $b(\, , \,)$ è quindi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

[1]Uno spazio vettoriale simplettico è una coppia (V, b) con b una forma bilineare antisimmetrica non-degenere

Ne segue che b ha indice di positività 2 ed indice di negatività 2. Già sappiamo che l'indice di nullità è zero perché b è non-degenere. Notare che per questo passaggio (determinazione degli indici) non è necessario calcolare alcun autovettore.
Consideriamo i due autospazi associati rispettivamente a 1 e -1. Con qualche semplice conto vediamo che $V_A(1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 = 0 \;\text{ e }\; -x_3 + x_4 = 0\}$ e che $V_A(-1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = 0 \;\text{ e }\; x_3 + x_4 = 0\}$. Una base ortonormale di $V_A(1)$ è data da

$$\underline{h}_1 = (1,0,0,0)\,, \quad \underline{h}_2 = (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$$

e una base ortonormale di $V_A(-1)$ è data da

$$\underline{h}_3 = (0,1,0,0)\,, \quad \underline{h}_4 = (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})\,.$$

Dato che per un operatore simmetrico autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali, deduciamo che i 4 vettori $\{\underline{h}_1, \underline{h}_2, \underline{h}_3, \underline{h}_4\}$ sono una base ortonormale $\mathcal{H}$ di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per L_A.
Sia

$$O := M_{\mathcal{E},\mathcal{H}}(\mathrm{id})$$

Per definizione O è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{h}_j$ nella base canonica; quindi

$$O = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

Allora O è ortogonale (perché la base $\mathcal{H}$ è ortonormale) e quindi

$$A_b^{\mathcal{H}} = O^T A_b^{\mathcal{E}} O \equiv O^T A O = O^{-1} A O = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo utilizzato la formula magica per le matrici associate ad una forma bilineare simmetrica in due basi diverse, nella seconda il fatto che O è una matrice ortogonale e nella terza il fatto che $\mathcal{H}$ è una base di autovettori per L_A.

2.6. Determinare una base $\mathcal{G}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi l'operatore T ma *non* diagonalizzi la forma $b(\,,\,)$. *Suggerimento.* Sicuramente dovete fissare una base $\mathcal{G}$ di autovettori per T; come andranno scelti questi autovettori per essere tali da *non* diagonalizzare $b(\,,\,)$?

Soluzione 2.6. Basterà prendere una base di autovettori $\mathcal{G}$ per l'operatore $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che *non* sia ortonormale perché allora la matrice del cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{id})$ non sarà ortogonale e non potremo asserire che

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{id})^T A M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{id}) = M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{id})^{-1} A M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{id})$$

Dato che $V_A(1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 = 0 \;\text{ e }\; -x_3 + x_4 = 0\}$ e che $V_A(-1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = 0 \;\text{ e }\; x_3 + x_4 = 0\}$, basterà scegliere $\underline{g}_1 = (1,0,1,1)$, $\underline{g}_2 = (2,0,0,0)$ e poi $\underline{g}_3 = (0,1,0,0)$ $\underline{g}_4 = (0,1,-1,1)$. Dobbiamo verificare che non succeda qualche miracolo e cioè che la matrice di b rispetto alla base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_4\}$ sia effettivamente non-diagonale: ed infatti $b(\underline{g}_2, \underline{g}_1) = 2 \neq 0$ e abbiamo finito perché $\mathcal{G}$ è una base di autovettori per L_A che però non diagonalizza b.

2.7. Vero o Falso: dato che b è non-degenere, non esistono vettori isotropi.

Soluzione 2.7. Falso. Un vettore isotropo $\underline{v}$ è un vettore tale che $b(\underline{v}, \underline{v}) = 0$. Il fatto che b sia non degenere ci dice che non esistono vettori $\underline{v}$ tali che $b(\underline{v}, \underline{w}) = 0$ per **tutti** i vettori $\underline{w} \in V = \mathbb{R}^4$, il che è diverso. Ed infatti il vettore $\underline{e}_3$ della base canonica è isotropo pur essendo b non-degenere.

2.8. Utilizzando il concetto di vettore non-isotropo e di b-ortogonale ad un vettore non-isotropo, costruite una base $\mathcal{K} = \{\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3, \underline{k}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\ ,\ )$.
Suggerimento. Sappiamo che il nucleo di b è banale. Cominciate quindi con il fissare un vettore non-isotropo $\underline{k}_1$; determinate poi

$$(\mathbb{R}\underline{k}_1)^{\perp_b} := \{\underline{v} \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ b(\underline{v}, \underline{k}_1) = 0\}$$

osservando che, passando in coordinate, abbiamo facilmente un'equazione cartesiana di $(\mathbb{R}\underline{k})_1^{\perp_b}$. Scegliete $\underline{k}_2$ verificante questa equazione cartesiana. Cercate poi $\underline{k}_3$ non-isotropo che sia b-ortogonale sia a $\underline{k}_1$ che a $\underline{k}_2$....

2.9. Determinare a partire da $\mathcal{K}$ una base $\mathcal{F}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $A_b^{\mathcal{F}}$ sia nella forma di Sylvester.

Soluzione 2.8 e 2.9.
Ricordiamo che per definizione

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_4 + u_4v_3$$

e quindi

$$b(\underline{u}, \underline{u}) = (u_1)^2 - (u_2)^2 + 2u_3u_4\,.$$

Determiniamo una base diagonalizzante $\mathcal{K}= \{\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3, \underline{k}_4\}$ per $b(\ ,\ )$, ci occuperemo poi di passare dalla forma diagonale alla forma di Sylvester. Osserviamo preliminarmente che questi 4 vettori dovranno essere non isotropi dato che $rg(b) = 4$. Per costruire $\mathcal{K}$ ci ispiriamo al procedimento induttivo che ci ha permesso di dimostrare, in generale, l'esistenza di basi diagonalizzanti per una qualsiasi forma bilineare simmetrica. Denotiamo con $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_4)$ una 4-pla in $\mathbb{R}^4$. Partiamo da un vettore non isotropo $\underline{k}_1$. Ad esempio il vettore $\underline{k}_1 = (1, 1, 1, 1)$ per il quale si ha $b(\underline{k}_1, \underline{k}_1) = 1 - 1 + 2 = 2 \neq 0$. Consideriamo il sottospazio b-ortogonale a $\underline{k}_1$. Questo è il sottospazio

$$\{\underline{u} \in \mathbb{R}^4 \,|\, b(\underline{u}, (1, 1, 1, 1)) = 0\} = \{(u_1, u_2, u_3, u_4) \,|\, u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0\}$$

Scegliamo il secondo vettore $\underline{k}_2$ della base diagonalizzante in questo sottospazio e non isotropo. Ad esempio il vettore $\underline{k}_2 = (1, 1, 1, -1)$ che verifica l'equazione trovata ed è tale che $b(\underline{k}_2, \underline{k}_2) = -2$.
Il terzo vettore $\underline{k}_3$ della base diagonalizzante va cercato fra i vettori non isotropi che verificano simultaneamente

$$\begin{cases} b(\underline{u}, (1, 1, 1, 1)) = 0 \\ b(\underline{u}, (1, 1, 1, -1)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ u_1 - u_2 - u_3 + u_4 = 0 \end{cases}$$

Il vettore $\underline{k}_3 = (1, 0, 0, -1)$ verifica entrambe queste equazioni; inoltre $b(\underline{k}_3, \underline{k}_3) = 1$ e quindi $\underline{k}_3$ è non-isotropo.
Rimane da determinare il quarto vettore: deve essere non isotropo e b-ortogonale a $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3$. Il vettore $\underline{k}_4$ va allora cercato nel sottospazio dei vettori $\underline{u} \in \mathbb{R}^4$ che

verificano simultaneamente

$$\begin{cases} b(\underline{u},(1,1,1,1)) = 0 \\ b(\underline{u},(1,1,1,-1)) = 0 \\ b(\underline{u},(1,0,0,-1)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0 \\ u_1 - u_3 = 0 \end{cases}$$

Una soluzione di questo sistema è data dal vettore $\underline{k}_4 = (1,2,1,0)$; inoltre $b(\underline{k}_4, \underline{k}_4) = -3$.
Se $\mathcal{K}$ è la base $\{\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_4\}$ si ha quindi

$$A_b^{\mathcal{K}} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Questo vuol dire che $\mathcal{K}$ è una base diagonalizzante come richiesto. Notare che questa base **non** è diagonalizzante per L_A; ad esempio $\underline{k}_1$ non è un autovettore.
La base $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1 := \frac{k_1}{\sqrt{2}}; \quad \underline{f}_2 := \underline{k}_3; \quad \underline{f}_3 := \frac{k_2}{\sqrt{2}}; \quad \underline{f}_4 := \frac{k_4}{\sqrt{3}}\}$ fornisce allora la matrice del teorema di Sylvester:

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

2.10. Determinare equazioni cartesiane di due sottospazi W_+ e W_- tali che la restrizione di b a W_+ (rispettivamente W_-) sia definita positiva (risp. negativa).

Soluzione 2.10. $W_+ = \mathrm{Span}\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$. Infatti b ristretta a tale sottospazio ha matrice associata nella base $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ uguale a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

quindi su W_+ cosí definito b è definita positiva, perché c'è una base di Sylvester in cui la matrice ha tutti i coefficienti sulla diagonale uguali ad 1. Analogamente $W_- = \mathrm{Span}\{\underline{f}_3, \underline{f}_4\}$ è il sottospazio su cui b è definita negativa. Le equazioni cartesiane per W_+ sono

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

le equazioni cartesiane per W_- sono

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 3. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale metrico. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ non necessariamente ortonormale e sia $T : V \to V$ lineare. Consideriamo

$$A := M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) \quad \text{e} \quad S := A^{\mathcal{B}}_{<\,,\,>}.$$

Dimostrare la seguente proposizione:
Proposizione. *T è un operatore simmetrico se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione $SA = A^T S$*
Suggerimento: T è simmetrico se e solo se

$$(2) \qquad < T\underline{v}, \underline{w} > = < \underline{v}, T\underline{w} >, \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Traducete in coordinate questa equazione.....

Soluzione. Traducendo in coordinate la relazione

$$< T\underline{v}, \underline{w} >=< \underline{v}, T\underline{w} > , \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

otteniamo che

$$\underline{y}^T S(A\underline{x}) = (A\underline{y})^T S\underline{x} , \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

e quindi

$$\underline{y}^T SA\underline{x} = \underline{y}^T A^T S\underline{x} , \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

da cui $SA = A^T S$ come richiesto.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia $S = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

4.1 Verificare che l'applicazione $< \, , \, >: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $< \underline{x}, \underline{y} >= \underline{y}^T S\underline{x}$ è un prodotto scalare definito positivo.

4.2 Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'operatore L_A con $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$. Stabilire se T è simmetrico rispetto al prodotto scalare definito in **4.1**.

Soluzione. La matrice associata a $<,>$ nella base canonica è ovviamente S. Il polinomio caratteristico di S è $\lambda^2 - 6\lambda + 1$ e dal criterio di Cartesio (oppure dalla formula risolutiva per le equazioni di secondo grado) vediamo che S ha autovalori strettamente positivi. Quindi $<,>$ è definito positivo. Dall'esercizio precedente sappiamo che L_A è simmetrico se e solo se $SA = A^T S$. Ma $SA \neq A^T S$, quindi L_A non è simmetrico rispetto a $<,>$.