Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 18/12/20

Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale metrico e sia S un sottoinsieme di V (non necessariamente un sottospazio). Sia

$$S^{\perp} := \{\underline{v} \in V \text{ tali che } < \underline{v}, \underline{s} >= 0 \ \forall \underline{s} \in S\}$$

Abbiamo verificato che S è un sottospazio. Sia, in particolare, U un sottospazio vettoriale di $(V, < , >)$. Sia $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_r\}$ una qualsiasi base di U. Abbiamo visto che

$$U^{\perp} = \{\underline{v} \in V \text{ tali che } < \underline{v}, \underline{u}_j >= 0 \ \forall j = 1, \ldots, r\}.$$

Infine, abbiamo dimostrato che vale la decomposizione $V = U \oplus U^{\perp}$.

Esercizio 1. Spazio vettoriale metrico $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z). Un vettore $\underline{v}$ verrà denotato tramite le sue coordinate. Applicare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla seguente base di $\mathcal{V}_O$:

$$\underline{w}_1 = (1, 1, 0)\,, \quad \underline{w}_2 = (0, 1, 0)\,, \quad \underline{w}_3 = (0, 0, 2)\,.$$

Esercizio 2. Spazio vettoriale metrico $\mathcal{V}_O$ con base *ortonormale* $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta vettoriale ortogonale al piano generato dai vettori $\underline{w}_1 = (1, 1, 0)$ e $\underline{w}_2 = (0, 1, -1)$.
Suggerimento: per le equazioni cartesiane basta applicare quanto riportato all'inizio di questo documento; per le equazioni parametriche potete fare uso del prodotto vettoriale....

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico

$$< \underline{x}, \underline{y} >:= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \equiv \underline{y}^T \cdot \underline{x}\,.$$

Determinare una base ortonormale del sottospazio U di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare poi equazioni cartesiane per $U^{\perp}$.

Esercizio 4. Vi ricordo che se V è uno spazio vettoriale metrico e U è un sottospazio con base ortonormale $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_r\}$ allora la proiezione ortogonale su U è l'applicazione lineare $P_U : V \to V$

$$P_U(\underline{v}) =< \underline{v}, \underline{u}_1 > \underline{u}_1 + \cdots + < \underline{v}, \underline{u}_r > \underline{u}_r\,.$$

Verificate che P_U coincide con l'operatore di proiezione su U parallelamente a $U^{\perp}$.
Suggerimento: esiste una base di V sulla quale i due operatori, P_U e la proiezione su U parallelamente a $U^{\perp}$, agiscono allo stesso modo.

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico. È dato il piano σ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1, -1, 0, 0) \qquad \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$$

- Trovare le equazioni cartesiane per $\sigma^{\perp}$.

- Sia P_σ l'operatore di proiezione ortogonale sul piano σ. Determinare la matrice associata a P_σ nella base canonica (quindi: base di partenza = base di arrivo = base canonica).

Esercizio 6. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione n. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ ortonormale con coordinate associate $\underline{x}$. Sia U un sottospazio di dimensione $n-1$ di equazioni cartesiane

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

(i). Verificare che la retta $U^\perp$ è generata dal vettore di coordinate $(a_1, \ldots, a_n)$. Il caso di $\mathcal{V}_O$ è trattato nelle mie brevi note.
Sia in particolare $(V, <\,,\,>) = (\mathbb{R}^6, \bullet)$ e sia U l'iperpiano di equazioni

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

(ii). Determinare la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^6$ all'operatore di proiezione ortogonale su U.
Suggerimento: siate furbe/i.

Esercizio 7. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2. Fissiamo la base standard $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ con coordinate associate (x_0, x_1, x_2) e consideriamo il prodotto scalare definito positivo

$$< P, Q > := \int_{-1}^{1} P(s)Q(s)ds$$

Consideriamo il vettore $1-X$ e la retta $\mathbb{R}(1-X)$. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio $(\mathbb{R}(1-X))^\perp$.
Suggerimento: l'ortogonale di una retta in V è un piano, perché V ha dimensione 3; ci aspettiamo quindi una sola equazione $\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 = 0$.