Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 18/12/20. Soluzioni.

Esercizio 1. Spazio vettoriale metrico $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z). Un vettore $\underline{v}$ verrà denotato tramite le sue coordinate. Applicare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla seguente base di $\mathcal{V}_O$:

$$\underline{w}_1 = (1, 1, 0)\,, \quad \underline{w}_2 = (0, 1, 0)\,, \quad \underline{w}_3 = (0, 0, 2)\,.$$

Soluzione. Basta applicare meccanicamente il procedimento: prima troviamo una base ortogonale, poi la normalizziamo moltiplicando ogni vettore per l'inverso della sua lunghezza.
Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt:

$$\underline{u}_1 = \underline{w}_1 = (1, 1, 0)$$

$$\underline{u}_2 = \underline{w}_2 - \frac{\langle \underline{w}_2, \underline{u}_1 \rangle}{\langle \underline{u}_1, \underline{u}_1 \rangle}\underline{u}_1 = (0, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

Infine $\underline{u}_3 = \underline{w}_3$ dato che $\langle \underline{w}_3, \underline{u}_1 \rangle = 0$ e $\langle \underline{w}_3, \underline{u}_2 \rangle = 0$. La base cercata è quindi:

$$\left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,, \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\,, \quad (0, 0, 1) \right\}$$

Esercizio 2. Spazio vettoriale metrico $\mathcal{V}_O$ con base *ortonormale* $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta vettoriale ortogonale al piano generato dai vettori $\underline{w}_1 = (1, 1, 0)$ e $\underline{w}_2 = (0, 1, -1)$.
Suggerimento: per le equazioni cartesiane basta applicare quanto riportato all'inizio di questo documento; per le equazioni parametriche potete fare uso del prodotto vettoriale....

Soluzione.
Per determinare le equazioni parametriche della retta ortogonale al piano $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ possiamo procedere in almeno due modi.
(i) Basta scrivere l'equazione cartesiana $ax + by + cz = 0$ del piano $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ e prendere la retta generata dal vettore che ha coordinate (a, b, c) [1]. L'equazione cartesiana del piano è $x - y - z = 0$. La retta è data quindi da $\mathrm{Span}(1, -1, -1)$ da cui si ricavano subito le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}$$

(ii) In alternativa sappiamo che un generatore della retta ortogonale al piano $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ è data dal prodotto vettoriale $\underline{w}_1 \wedge \underline{w}_2$, Infatti, per definizione, $\underline{w}_1 \wedge \underline{w}_2$ è un vettore ortogonale al piano $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$. Basta allora applicare la formula

$$\underline{w}_1 \wedge \underline{w}_2 = \det \begin{vmatrix} \underline{i} & 1 & 0 \\ \underline{j} & 1 & 1 \\ \underline{k} & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

[1] Vedere le *Note sul prodotto scalare in* $\mathcal{V}_O$

sviluppando secondo la prima colonna.
Per le equazioni cartesiane della retta ortogonale al piano $W := \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ ragioniamo come nella parte introduttiva di questo compito:

$$(x, y, z) \perp W \Leftrightarrow (x, y, z) \perp \underline{v},\ \forall \underline{v} \in W \Leftrightarrow (x, y, z) \perp (1, 1, 0) \textbf{ e } (x, y, z) \perp (0, 1, 1)$$

Ma

$$\begin{gathered} (x, y, z) \perp (1, 1, 0) \textbf{ e } (x, y, z) \perp (0, 1, 1) \Leftrightarrow \\ < (x, y, z), (1, 1, 0) >= 0 \textbf{ e } < (x, y, z), (0, 1, -1) >= 0 \end{gathered}$$

e svolgendo i due prodotti scalari otteniamo finalmente le due equazioni cartesiane per la retta ortogonale:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico

$$< \underline{x}, \underline{y} >:= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \equiv \underline{y}^T \cdot \underline{x}\,.$$

Determinare una base ortonormale del sottospazio U di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare poi equazioni cartesiane per $U^{\perp}$.

Soluzione. Una base per il sottospazio U di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

è ad esempio $\underline{u}_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\underline{u}_2 = (0, 1, 0, -1)$ che è anche ortogonale, come subito si verifica. Basta quindi normalizzare, cioè dividere per le rispettive lunghezze, per ottenere una base ortonormale di U. Se avessimo fissato una base di U non-ortogonale, ad esempio $\underline{v}_1 = (1, 1, -1, -1)$, $\underline{v}_2 = (0, -1, 0, 1)$ avremmo dovuto ortoganalizzarla, considerando quindi la coppia $\underline{v}'_1$ $\underline{v}'_2$ data da

$$\underline{v}'_1 = \underline{v}_1\,, \quad \underline{v}'_2 = \underline{v}_2 - \frac{< \underline{v}_2, \underline{v}'_1 >}{< \underline{v}'_1, \underline{v}'_1 >}\underline{v}'_1$$

che è uguale a

$$\underline{v}'_1 = (1, 1, -1, -1)\,, \quad \underline{v}'_2 = (0, -1, 0, 1) - \frac{(-2)}{4}(1, 1, -1, -1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\,.$$

$\{\underline{v}'_1, \underline{v}'_2\}$ è una base ortogonale; considerando

$$\{\frac{1}{\|\underline{v}'_1\|}\underline{v}'_1, \frac{1}{\|\underline{v}'_2\|}\underline{v}'_2\}$$

si ottiene una base ortonormale. Le equazioni cartesiane per $U^{\perp}$ sono ottenute sfruttando le osservazioni fatte nella parte introduttiva di questo compito: un vettore $\underline{x}$ appartiene ad $U^{\perp}$ sse è ortogonale sia a $\underline{u}_1 = (1, 0, -1, 0)$ che a $\underline{u}_2 = (0, 1, 0, -1)$, quindi se e solo se

$$\begin{cases} < \underline{x}, \underline{u}_1 >= 0 \\ < \underline{x}, \underline{u}_2 >= 0 \end{cases}$$

se e solo se

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e queste sono proprio equazioni cartesiane per $U^\perp$.

Esercizio 4. Vi ricordo che se V è uno spazio vettoriale metrico e U è un sottospazio con base ortonormale $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$ allora la proiezione ortogonale su U è l'applicazione lineare $P_U : V \to V$

$$P_U(\underline{v}) =< \underline{v}, \underline{u}_1 > \underline{u}_1 + \cdots + < \underline{v}, \underline{u}_r > \underline{u}_r \, .$$

Verificate che P_U coincide con l'operatore di proiezione su U parallelamente a $U^\perp$. *Suggerimento:* esiste una base di V sulla quale i due operatori, P_U e la proiezione su U parallelamente a $U^\perp$, agiscono allo stesso modo.

Soluzione. Fissiamo la base

$$\mathcal{G} = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{n-r}\}$$

con $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{n-r}\}$ una qualsiasi base di $U^\perp$. Per l'operatore di proiezione su U parallelamente a $U^\perp$, chiamiamolo P, abbiamo, per definizione,

$$P\underline{u}_1 = \underline{u}_1 \, , \dots, P\underline{u}_r = \underline{u}_r \, ; \quad P\underline{w}_1 = \underline{0} \, , \dots, P\underline{w}_{n-r} = \underline{0}.$$

Per l'operatore P_U abbiamo

$$P_U(\underline{u}_1) =< \underline{u}_1, \underline{u}_1 > \underline{u}_1 + < \underline{u}_1, \underline{u}_2 > \underline{u}_2 + \cdots + < \underline{u}_1, \underline{u}_r > \underline{u}_r = \underline{u}_1$$

dato che la base $\{\underline{u}_1, \dots \underline{u}_r\}$ di U è ortonormale. Analogamente $P_U(\underline{u}_j) = \underline{u}_j$, $j \in \{2, \dots, r\}$. Dato poi che $\underline{w}_k \in U^\perp$ abbiamo, ovviamente, $P_U(\underline{w}_k) = \underline{0}$, $k \in \{1, \dots, n-r\}$. Quindi P e P_U agiscono allo stesso modo sui vettori della base $\mathcal{G}$; dato che un operatore lineare è univocamente determinato dai valori che assume su una base, possiamo concludere che $P = P_U$.

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico. È dato il piano σ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1, -1, 0, 0) \qquad \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$$

- Trovare le equazioni cartesiane per $\sigma^\perp$.
- Sia P_σ l'operatore di proiezione ortogonale sul piano σ. Determinare la matrice associata a P_σ nella base canonica (quindi: base di partenza = base di arrivo = base canonica).

Soluzione. Come già visto in esercizi precedenti $\sigma^\perp$ ha equazioni cartesiane che si ottengono traducendo in coordinate le due relazioni

$$\begin{cases} < \underline{x}, \underline{v}_1 >= 0 \\ < \underline{x}, \underline{v}_2 >= 0 \end{cases}$$

e quindi $\sigma^\perp$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$ e quindi

$$\{\frac{\underline{v}_1}{||\underline{v}_1||}, \frac{\underline{v}_2}{||\underline{v}_2||}\}$$

è una base *ortonormale* di σ. Poniamo $\underline{f}_j = \underline{v}_j / ||\underline{v}_j||$. Sappiamo che

$$P_U(\underline{v}) =< \underline{v}, \underline{f}_1 > \underline{f}_1 + < \underline{v}, \underline{f}_2 > \underline{f}_2 \underline{v}$$

Per scrivere la matrice associata a P_U nella base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ dobbiamo calcolare $P_U(\underline{e}_j)$, $j = 1, \dots, 4$ utilizzando la formula precedente; i vettori ottenuti, espressi ovviamente nella base canonica, ci danno le colonne della matrice cercata. Con qualche conto si ottiene:

$$\begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

Esercizio 6. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione n. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ ortonormale con coordinate associate $\underline{x}$. Sia U un sottospazio di dimensione $n-1$ di equazioni cartesiane

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

con a_j non tutti nulli.
(i). Verificare che la retta $U^\perp$ è generata dal vettore di coordinate $(a_1, \dots, a_n)$. Il caso di $\mathcal{V}_O$ è trattato nelle mie brevi note.
Sia in particolare $(V, <\,,\,>) = (\mathbb{R}^6, \bullet)$ e sia U l'iperpiano di equazioni

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

(ii). Determinare la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^6$ all'operatore di proiezione ortogonale su U.
Suggerimento: siate furbe/i.

Soluzione.
(i) Sappiamo che U ha dimensione $n-1$; ne segue che $U^\perp$ è un sottospazio di dimensione 1 ed è quindi generato da un unico vettore non nullo. Vogliamo verificare che il vettore $\underline{a}$ di coordinate $(a_1, \dots, a_n)$ è un tale generatore; basta verificare che il prodotto scalare di $\underline{a}$ con un generico vettore di U è nullo; ma se $\underline{u} \in U$ ha coordinate $\underline{x}$ allora da una parte

$$< \underline{a}, \underline{u} >= a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

(perché abbiamo fissato una base di V ortonormale) e dall'altra

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

perché le coordinate $\underline{x}$ di $\underline{u}$ verificano l'equazione di U. Concludiamo che $< \underline{a}, \underline{u} >= 0$ e quindi che $\underline{a} \in U^\perp$; dato che è non nullo, ne è un generatore.
(ii) È più semplice determinare la matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_{U^\perp})$ perché poi si ha $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_U) = I_6 - M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_{U^\perp})$ (già visto). Ma sappiamo da (i) che

$$U^\perp = \mathbb{R}\underline{a}$$

con $\underline{a} = (1,1,1,1,1,1)$. Quindi $\frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|}$ è una base ortonormale di $U^\perp$ e si ha quindi

$$P_{U^\perp}(\underline{x}) = (\underline{x} \bullet \frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|})\frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|}\,.$$

Calcoliamo allora $P_{U^\perp}\underline{e}_j$. Si ha

$$P_{U^\perp}\underline{e}_j = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \forall j = 1, \dots, 6.$$

La matrice di $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_{U^\perp})$ ha per colonne i vettori $P_{U^\perp}(\underline{e}_j)$, quindi

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_{U^\perp}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

da cui

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_U) = I_6 - M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_{U^\perp}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 5 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2. Fissiamo la base standard $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ con coordinate associate (x_0, x_1, x_2) e consideriamo il prodotto scalare definito positivo

$$< P, Q >:= \int_{-1}^{1} P(s)Q(s)ds$$

Consideriamo il vettore $1-X$ e la retta $\mathbb{R}(1-X)$. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio $(\mathbb{R}(1-X))^\perp$.
Suggerimento: l'ortogonale di una retta in V è un piano, perché V ha dimensione 3; ci aspettiamo quindi una sola equazione $\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 = 0$.

Soluzione.
Un vettore $x_0 + x_1X + x_2X^2$ appartiene a $(\mathbb{R}(1-X))^\perp$ se e solo se

$$< x_0 + x_1X + x_2X^2, 1 - X >= 0$$

se e solo se

$$\int_{-1}^{1} (x_0 + x_1 s + x_2 s^2)(1 - s)\, ds = 0$$

se e solo se

$$\int_{-1}^{1} (x_0 + (-x_0 + x_1)s + (-x_1 + x_2)s^2 - x_2 s^3)ds \ = \ 0$$

se e solo se

$$x_0 \int_{-1}^{1} ds + (-x_1 + x_2) \int_{-1}^{1} s^2 ds \ = \ 0$$

(l'integrale è lineare; inoltre l'integrale definito da -1 a 1 di una funzione dispari è zero), se e solo se

$$x_0 2 + (-x_1 + x_2)\frac{2}{3} = 0$$

Conclusione: le equazioni cartesiane di $(\mathbb{R}(1-X))^\perp$ nella base canonica sono

$$3x_0 - x_1 + x_2 = 0\,.$$