Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 12/12/20.

Esercizi sulle applicazione lineari

Esercizio 1. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Consideriamo il piano vettoriale π di equazione $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e la retta vettoriale r data da $\mathbb{R}(1, 2, 1)$. Abbiamo visto nel compito del 27/11 che si ha $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus r$ ed abbiamo determinato la matrice associata nella base canonica all'operatore P_2, proiezione su π parallelamente a r. Scrivere la matrice associata alle seguente applicazioni lineari nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ [1]:
- la proiezione P_1 sulla retta r parallelamente al piano π;
- la simmetria S_1 rispetto a r parallelamente a π;
- la simmetria S_2 rispetto a π parallelamente a r.

Suggerimento: vedere il compito del 30/10 ed il compito del 27/11.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $V = W_1 \oplus W_2$ una sua decomposizione in somma diretta. Possiamo allora definir, in generale, quattro operatori:

P_1 la proiezione su W_1 parallelamente a W_2;

P_2, la proiezione su W_2 parallelamente a W_1;

S_1, la simmetria rispetto a W_1 parallelamente a W_2;

S_2, la simmetria rispetto a W_2 parallelamente a W_1.

Verificare che P_1 e P_2 sono diagonalizzabili con autovalori 1 e 0 e che $V_{P_1}(0) = W_2$, $V_{P_1}(1) = W_1$; $V_{P_2}(0) = W_1$, $V_{P_2}(1) = W_2$.
Verificare che S_1 e S_2 sono diagonalizzabili con autovalori 1 e -1 e che $V_{S_1}(1) = W_1$, $V_{S_1}(-1) = W_2$; $V_{S_2}(1) = W_2$, $V_{S_2}(-1) = W_1$.

Esercizi sul prodotto scalare in $\mathcal{V}_O$

Passiamo ora allo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z). Fate riferimento alle brevi note che ho caricato sulla pagina web del corso. Un vettore $\underline{v}$ verrà denotato tramite le sue coordinate.

Esercizio 3. Sia $W = \text{Span}(\underline{w})$ con $\underline{w}$ di coordinate $(1, -1, 1)$ rispetto alla base ortonormale fissata di $\mathcal{V}_O$. Determinare le coordinate dei due versori di questa retta. Determinare il versore di questa retta che forma un angolo acuto con il vettore $\underline{j}$ della base fissata.

Esercizio 4. Sia $W \leq \mathcal{V}_O$ la retta vettoriale di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare i vettori di W che hanno lunghezza uguale a 2.

[1] quindi: base partenza = base arrivo = base canonica

Esercizio 5. Consideriamo il piano vettoriale σ di equazione cartesiana

$$x + 2y - z = 0$$

(i) Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0) \qquad \underline{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}})$$

costituiscono una base *ortonormale* di σ.

(ii) Decomporre il vettore $\underline{u} = (0, 1, 2)$ del piano σ nella somma $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 \in \mathrm{Span}(\underline{f}_1)$ e $\underline{u}_2 \in \mathrm{Span}(\underline{f}_2)$. (Leggere attentamente le mie note, la soluzione dell'esercizio segue da una formula dimostrate nelle note....).