Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 12/12/20. Soluzioni.

Esercizi sulle applicazione lineari

Esercizio 1. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Consideriamo il piano vettoriale π di equazione $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e la retta vettoriale r data da $\mathbb{R}(1, 2, 1)$. Abbiamo visto nel compito del 27/11 che si ha $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus r$ ed abbiamo determinato la matrice associata nella base canonica all'operatore P_2, proiezione su π parallelamente a r. Scrivere la matrice associata alle seguente applicazioni lineari nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ [1]:
- la proiezione P_1 sulla retta r parallelamente al piano π;
- la simmetria S_1 rispetto a r parallelamente a π;
- la simmetria S_2 rispetto a π parallelamente a r.

Suggerimento: vedere il compito del 30/10 ed il compito del 27/11.

Soluzione. Abbiamo visto nel compito del 27/11 che

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_2) = \begin{vmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

ed abbiamo stabilito nel compito del 30/10 che

$$P_1 = \mathrm{Id} - P_2\,; \quad S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2\,; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id}\,. \tag{1}$$

Sappiamo, infine, che per ogni spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ e di dimensione n ed ogni base $\mathcal{E}$ di V si ha che

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\ \ ) : \mathcal{L}(V, V) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali [2]. Quindi

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_1) = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\mathrm{Id} - P_2) = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) - M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_2) = I_3 - M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_2)$$

e, analogamente,

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(S_1) = I_3 - 2M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_2)\,; \ \ M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(S_2) = 2M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_2) - I_3$$

e si tratta ora di fare dei semplici conti.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $V = W_1 \oplus W_2$ una sua decomposizione in somma diretta. Possiamo allora definire, in generale, quattro operatori:

P_1 la proiezione su W_1 parallelamente a W_2;

P_2, la proiezione su W_2 parallelamente a W_1;

S_1, la simmetria rispetto a W_1 parallelamente a W_2;

S_2, la simmetria rispetto a W_2 parallelamente a W_1.

Verificare che P_1 e P_2 sono diagonalizzabili con autovalori 1 e 0 e che $V_{P_1}(0) = W_2$, $V_{P_1}(1) = W_1$; $V_{P_2}(0) = W_1$, $V_{P_2}(1) = W_2$.

---

[1] quindi: base partenza = base arrivo = base canonica

[2] sappiamo anche che questo isomorfismo gode dell'ulteriore proprietà che $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T \circ S) = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(S)$, ma non avremo bisogno di questa proprietà in questo esercizio

Verificare che S_1 e S_2 sono diagonalizzabili con autovalori 1 e -1 e che $V_{S_1}(1) = W_1$, $V_{S_1}(-1) = W_2$; $V_{S_2}(1) = W_2$, $V_{S_2}(-1) = W_1$.

Soluzione. Sappiamo che $V = W_1 \oplus W_2$ e che per definizione

$$P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 \quad \text{se} \quad \underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \,.$$

Quindi per ogni vettore $\underline{w}$ di W_1 si ha che $P_1(\underline{w}) = \underline{w}$, perché $\underline{w}$ ha decomposizione $\underline{w} = \underline{w} + \underline{0}$ rispetto a $V = W_1 \oplus W_2$. Similmente, per ogni vettore $\underline{w} \in W_2$ abbiamo che $P_1(\underline{w}) = \underline{0}$ perché $\underline{w}$ ha decomposizione $\underline{0} + \underline{w}$ rispetto a $V = W_1 \oplus W_2$. Quindi $W_1 \subset V_1 = \mathrm{Ker}(P_1 - \mathrm{Id})$, l'autospazio associato a $\lambda = 1$, e $W_2 \subset V_0 = \mathrm{Ker} P_1$, l'autospazio associato a $\lambda = 0$. Sia $n = \dim V$ e $k = \dim W_1$; quindi $\dim W_2 = n-k$. Fissiamo una base $\mathcal{F}_1 = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\}$ di W_1 ed una base $\mathcal{G}_2 = \{\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_{n-k}\}$ di W_2. La collezione di vettori $\mathcal{B} := \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{G}_2$ è una base di V ed è chiaramente una base diagonalizzante con matrice diagonale che presenta i primi k coefficienti sulla diagonale uguali a 1 e gli altri uguali a 0. Quindi il polinomio caratteristico è uguale a $(1-\lambda)^k(-\lambda)^{n-k}$ da cui $W_1 = V_1$ e $W_2 = V_0$ perché la molteplicità geometrica è sempre minore o uguale alla molteplicità algebrica. Gli altri 3 operatori si trattano in maniera del tutto analoga.

Esercizi sul prodotto scalare in $\mathcal{V}_O$

Passiamo ora allo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z). Fate riferimento alle brevi note che ho caricato sulla pagina web del corso. Un vettore $\underline{v}$ verrà denotato tramite le sue coordinate.

Esercizio 3. Sia $W = \mathrm{Span}(\underline{w})$ con $\underline{w}$ di coordinate $(1, -1, 1)$ rispetto alla base ortonormale fissata di $\mathcal{V}_O$. Determinare le coordinate dei due versori di questa retta. Determinare il versore di questa retta che forma un angolo acuto con il vettore $\underline{j}$ della base fissata.

Soluzione. Un vettore non nullo della retta W è il vettore $\underline{v} = (1, -1, 1)$. Dunque i versori di W sono $\underline{v}_1 = \underline{v}/\|\underline{v}\| = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $\underline{v}_2 = -\underline{v}/\|\underline{v}\| = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Per determinare quale tra $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ formi un angolo acuto con il versore $\underline{j}$, basta ricordarsi che due vettori formano un angolo acuto se e solo se il coseno dell'angolo che formano è positivo, ovvero se e solo se il loro prodotto scalare è positivo. Si calcola immediatamente $\langle \underline{v}_1, \underline{j} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\langle \underline{v}_2, \underline{j} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dunque il versore richiesto è $\underline{v}_2$. In alternativa, le coordinate di un *versore* sono i coseni degli angoli che questo forma con gli elementi della base ortonormale fissata. Se dobbiamo scegliere il coseno dell'angolo con $\underline{j}$ positivo, allora dobbiamo scegliere il versore con seconda coordinata positiva, cioè $\underline{v}_2$.

Esercizio 4. Sia $W \leq \mathcal{V}_O$ la retta vettoriale di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare i vettori di W che hanno lunghezza uguale a 2.

Soluzione. Una base di W è data dal vettore $(1, 1, 0)$. Ne segue che i vettori di W sono tutti e soli i vettori con coordinate $(\lambda, \lambda, 0)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quelli di lunghezza 2 sono quelli per cui $\sqrt{\lambda^2+\lambda^2}=2$, ovvero quelli con $\lambda=\pm\sqrt{2}$. Esplicitamente, si tratta dei due vettori di coordinate $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ e $(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$.

Esercizio 5. Consideriamo il piano vettoriale σ di equazione cartesiana

$$x+2y-z=0$$

(i) Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1=(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}},0) \qquad \underline{f}_2=(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}})$$

costituiscono una base *ortonormale* di σ.

(ii) Decomporre il vettore $\underline{u}=(0,1,2)$ del piano σ nella somma $\underline{u}=\underline{u}_1+\underline{u}_2$ con $\underline{u}_1\in\text{Span}(\underline{f}_1)$ e $\underline{u}_2\in\text{Span}(\underline{f}_2)$. (Leggere attentamente le mie note, la soluzione dell'esercizio segue da una formula dimostrata nelle note....).

Soluzione. Si ha $\langle\underline{f}_1,\underline{f}_2\rangle=\frac{2}{\sqrt{150}}-\frac{2}{\sqrt{150}}=0$ e quindi i due vettori sono ortogonali. Inoltre,

$$||\underline{f}_1||=1\,,\quad ||\underline{f}_2||=1$$

e quindi i due vettori sono ortonormali. Dato che le coordinate di $\underline{f}_1$ e quelle di $\underline{f}_2$ soddisfano l'equazione del piano, concludiamo che $\{\underline{f}_1,\underline{f}_2\}$ costituiscono una base ortonormale del piano σ.

Per (ii): sappiamo che per ogni vettore del piano si ha, dall'ortonormalità di $\{\underline{f}_1,\underline{f}_2\}$,

$$\underline{u}=\langle\underline{u},\underline{f}_1\rangle\underline{f}_1+\langle\underline{u},\underline{f}_2\rangle\underline{f}_2$$

che è appunto del tipo $\underline{u}_1+\underline{u}_2$ con $\underline{u}_1\in\text{Span}(\underline{f}_1)$ e $\underline{u}_2\in\text{Span}(\underline{f}_2)$. Si tratta allora di fare i due prodotti scalari. Facendo i conti otteniamo $\langle\underline{u},\underline{f}_1\rangle=-1/\sqrt{5}$ e $\langle\underline{u},\underline{f}_2\rangle=12/\sqrt{30}$; quindi $\underline{u}_1=(-2,1,0)$, $\underline{u}_2=(2/5,4/5,2)$.