Geometria. Laurea in Fisica. a.a. 2020-2021

Canale 3.

Esercitazione scritta in classe.

11 Dicembre 2020

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	9	
Totale	33	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE **SPENTI** E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. (8 punti)
1.1. (3 punti) Sia $V = M_{22}(\mathbb{R})$ e $W = \{A \in V$ tali che $A = A^T$ e $a_{11} + a_{22} = 0\}$. Stabilire se W è un sottospazio di V ed in caso affermativo determinarne una base.
1.2. (2 punti) Sia $V = \mathbb{R}^5$ e $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = 0\}$. Stabilire se W è un sottospazio di V ed in caso affermativo determinarne una base.
1.3. (3 punti) Una matrice A in $M_{nn}(\mathbb{R})$ è nilpotente se esiste $k \in \mathbb{N}^+$ tale che $A^k = \underline{0}$. (A^k è il prodotto righe per colonne di A con se stessa k volte; $\underline{0}$ è la matrice nulla). Sia $N \subset M_{22}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici nilpotenti. Verificare che N contiene le matrici $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$. Stabilire se N è un sottospazio di $V = M_{22}(\mathbb{R})$.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 2. Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ e $\underline{w}$ i vettori di $\mathbb{R}^5$ dati da

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_5 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

2.1 (2 punti) Stabilire se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$F(\underline{v}_1) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_2) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_4) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_5) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

e in caso affermativo:

(i) (2 punti) calcolare l'immagine tramite F del vettore $\underline{w}$.
(ii) (2 punti) stabilire se F è iniettiva.
(iii) (2 punti) determinare l'immagine di F.

Soluzione.

Risposta:

Esercizio 3. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^3$ i sottospazi dati da

$$U = \operatorname{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 2 \\ -2 \\ 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 4 \\ -3 \\ -1 \end{array} \right| \right), \quad V = \operatorname{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 7 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} -3 \\ 3 \\ 5 \end{array} \right| \right).$$

(5 punti) Determinare una base di $U \cap V$.
(2 punti) Stabilire se $\mathbb{R}^3 = U + V$.
(1 punto) Stabilire se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 4. Sia $u \in \mathbb{R}$ e sia $A(u)$ la matrice

$$A(u) := \begin{vmatrix} 1 & u/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & u & 1 \end{vmatrix}$$

Sia $T_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $A(u)$: $T_u := L_{A(u)}$.
4.1. (2 punti) Determinare il polinomio caratteristico di T_u e gli autovalori di T_u.
4.2 (2 punti) Verificare che T_0 è diagonalizzabile e determinare una base di autovettori.
4.3. (5 punti) Studiare la diagonalizzabilità di T_u al variare di $u \in \mathbb{R}$.

Soluzione:

Risposta: