Geometria. Laurea in Fisica. a.a. 2020-2021

Canale 3.

Esercitazione scritta in classe. Soluzione.

11 Dicembre 2020

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	9	
Totale	33	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE **SPENTI** E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. (8 punti)
1.1. (3 punti) Sia $V = M_{22}(\mathbb{R})$ e $W = \{A \in V$ tali che $A = A^T$ e $a_{11} + a_{22} = 0\}$. Stabilire se W è un sottospazio di V ed in caso affermativo determinarne una base.
1.2. (2 punti) Sia $V = \mathbb{R}^5$ e $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = 0\}$. Stabilire se W è un sottospazio di V ed in caso affermativo determinarne una base.
1.3. (3 punti) Una matrice A in $M_{nn}(\mathbb{R})$ è nilpotente se esiste $k \in \mathbb{N}^+$ tale che $A^k = \underline{0}$. (A^k è il prodotto righe per colonne di A con se stessa k volte; $\underline{0}$ è la matrice nulla). Sia $N \subset M_{22}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici nilpotenti. Verificare che N contiene le matrici $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$. Stabilire se N è un sottospazio di $V = M_{22}(\mathbb{R})$.

Soluzione:
1.1. W è l'intesezione del sottospazio $\mathcal{S}_{22}$ costituito dalle matrici simmetriche e del sottoinsieme $\mathcal{T}_{22}$ delle matrici tali che $a_{11} + a_{22} = 0$. È immediato verificare che $\mathcal{T}_{22}$ è di fatto un sottospazio. Ne segue che $\mathcal{S}_{22} \cap \mathcal{T}_{22}$, che è W_1, è un sottospazio. $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ appartiene a W se e solo se è della forma $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{vmatrix}$.
Ne segue che

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

e dato che queste due matrici sono linearmente indipendenti perché non-proporzionali, ne deduciamo che sono una base di W.
1.2. W, che è l'unione insiemistica degli iperpiani coordinati (quelli di equazione cartesiana $x_j = 0$), non è un sottospazio. Ad esempio $\underline{w} = (1, 0, 0, 0, 0) \in W$ e $\underline{w}' = (0, 1, 1, 1, 1) \in W$ ma $\underline{w} + \underline{w}' = (1, 1, 1, 1, 1) \notin W$.
1.3. È immediato verificare che

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e quindi queste due matrici sono nilpotenti. La loro somma è $B := \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ e si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e con un semplice ragionamento si vede allora che $B \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ **non** è nilpotente perché

$$B^{2k} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{mentre} \quad B^{2k+1} = B.$$

Ne segue che N non è un sottospazio.

Esercizio 2. Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ e $\underline{w}$ i vettori di $\mathbb{R}^5$ dati da

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_5 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

2.1 (2 punti) Stabilire se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$F(\underline{v}_1) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_2) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_4) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_5) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

e in caso affermativo:

(i) (2 punti) calcolare l'immagine tramite F del vettore $\underline{w}$.
(ii) (2 punti) stabilire se F è iniettiva.
(iii) (2 punti) determinare l'immagine di F.

Soluzione. E' immediato osservare che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^5$. Infatti la matrice che ha per colonne questi vettori è una matrice quadrata triangolare superiore con tutti i pivot diversi da zero, e dunque è non singolare. Ne segue che esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ con le proprietà richieste; F è ottenuta estendendo per linearità. Per determinare l'immagine del vettore $(3, 2, 1, 0, 0)$ mediante l'applicazione F, calcoliamo le coordinate del vettore $(3, 2, 1, 0, 0)$ rispetto alla base $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$, cerchiamo cioè i numeri reali x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tali che $x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + x_3\underline{v}_3 + x_4\underline{v}_4 + x_5\underline{v}_5 = (3, 2, 1, 0, 0)$, ovvero cerchiamo le soluzioni del sistema lineare la cui matrice completa è

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

Applicando la risoluzione all'insietro, oppure l'algoritmo di eliminazione di Gauss a salire, troviamo

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

ovvero $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 0, 0)$. In altre parole $(3, 2, 1, 0, 0) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$. A questo punto, per calcolare $F(3, 2, 1, 0, 0)$ basta utilizzare la linearità di F:

$$\begin{aligned} F(3,2,1,0,0) &= F(\underline{v}_1 + \underline{v}_1 + \underline{v}_3) = F(\underline{v}_1) + F(\underline{v}_2) + F(\underline{v}_3) \\ &= \left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{array}\right| \end{aligned}$$

L'applicazione F non può essere iniettiva perché non possono esserci applicazioni iniettive da uno spazio vettoriale di dimensione k, V, ad uno di dimensione strettamente minore di k, W (il nucleo ha dimensione $\dim V - \dim \mathrm{Im}(F)$ e questo è un numero maggiore o uguale a 1).
L'immagine di F è tutto $\mathbb{R}^4$ perché $\mathrm{Im}F$ è lo Span di

$$\underline{u}_1 := \left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right|, \ \underline{u}_2 := \left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right|, \ \underline{u}_3 := \left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right|, \ \underline{u}_4 := \left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right|, \ \underline{u}_5 := \left|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right|,$$

che certamente contiene $\mathrm{Span}(\underline{u}_5, \underline{u}_4, \underline{u}_3, \underline{u}_4)$. Ma la matrice che ha questi vettori come colonne ha ovviamente rango 4 (è triangolare superiore con pivots non nulli) e quindi $\dim(\mathrm{Span}(\underline{u}_5, \underline{u}_4, \underline{u}_3, \underline{u}_4)) = 4$ il che implica che $\mathrm{Im}F = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^3$ i sottospazi dati da

$$U = \mathrm{Span}\left(\left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -3 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} 2 \\ -2 \\ 0 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} 4 \\ -3 \\ -1 \end{array}\right| \right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} 7 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} -3 \\ 3 \\ 5 \end{array}\right| \right).$$

(5 punti) Determinare una base di $U \cap V$.
(2 punti) Stabilire se $\mathbb{R}^3 = U + V$.
(1 punto) Stabilire se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Soluzione: Esprimiamo U e V come soluzioni di sistemi lineari omogenei e troviamo una base di $U \cap V$ risolvendo il sistema ottenuto prendendo sia le equazioni per U che le equazioni per V.
Per trovare una base di U operiamo una riduzione di Gauss sulla matrice

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{array}\right|.$$

Scopriamo in questo modo che U ha dimensione 2 e che una base è data, ad esempio, dai primi due vettori colonna. Analogamente procediamo per V e scopriamo che V ha dimensione 2 e che una sua base è data dalle prime due colonne. Ora operiamo con Gauss su

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 2 & -2 & x_2 \\ -3 & 0 & x_3 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \end{array}\right|$$

e otteniamo

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -6 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & x_1 \\ 0 & 6 & x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - x_3 \end{array}\right|$$

da cui imponendo la compatibilità deduciamo che

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \qquad V = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0\}.$$

Quindi $U \cap V$ è costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema troviamo che $U \cap V = \mathrm{Span}(-7, 2, 5)$.
Da Grassmann otteniamo che $\dim(U + V) = 2 + 2 - 1 = 3$; quindi $U + V = \mathbb{R}^3$. Ovviamente non è vero che $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$ perché $U \cap V \neq \underline{0}$

Esercizio 4. Sia $u \in \mathbb{R}$ e sia $A(u)$ la matrice

$$A(u) := \left|\begin{array}{ccc} 1 & u/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & u & 1 \end{array}\right|$$

Sia $T_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $A(u)$: $T_u := L_{A(u)}$.
4.1. (2 punti) Determinare il polinomio caratteristico di T_u e gli autovalori di T_u.
4.2 (2 punti) Verificare che T_0 è diagonalizzabile e determinare una base di autovettori.
4.3. (5 punti) Studiare la diagonalizzabilità di T_u al variare di $u \in \mathbb{R}$.

Soluzione: Il polinomio caratteristico di A_u è $(2 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$ che ha radici $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica 1. Notiamo che il polinomio caratteristico non dipende da u.
Si ha

$$A(0) = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

L'autospazio V_0 di $A(0)$ è il nucleo di $A(0)$, che è $\{\underline{x} \,|\, A(0)\underline{x} = \underline{0}\}$; lo riscriviamo come le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{x_3}{2} = 0 \\ x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Si ha (facile) $V_0 = \mathbb{R}(1, 0, -2)$. Passiamo a $V_2 = \mathrm{Ker}(A(0) - 2I_3)$; quindi V_2 è il nucleo di

$$A(0) - 2I_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ne segue che

$$V_2 = \{\underline{x}\,|2x_1 - x_3 = 0\}$$

che ha base, ad esempio, $\{(1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$. Conclusione: i tre vettori $\{(1, 0, -2), (1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$ sono una base di autovettori per T_0. In particolare T_0 è diagonalizzabile.
Passiamo allo studio della diagonalizzabilità di T_u al variare di u. Per l'autovalore λ_2 sappiamo che la molteplicità algebrica è necessariamente uguale a quella geometrica (perché $1 \leq m_g(\lambda_2)$; $m_g(\lambda_2) \leq m_a(\lambda_2) = 1$ e quindi $m_g(\lambda_2) = m_a(\lambda_2) = 1$). Possiamo quindi concentrarci sull'autovalore $\lambda_1 = 2$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$ è dato da $\mathrm{Ker}(A_u - 2I_3)$. Ma

$$A_u - 2I_3 = \begin{vmatrix} -1 & u/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & u & -1 \end{vmatrix}$$

La dimensione dell'autospazio V_2 è quindi uguale a $3 - r_u$ con r_u uguale al rango di questa matrice. Questa dimensione è quindi uguale a 2, che è la molteplicità algebrica dell'autovalore, se e solo se r_u è uguale a 1. Tuttavia, è semplice verificare che $r_u = 1$ se e solo se $u = 0$. Quindi, la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale alla sua molteplicità geometrica se e solo se $u = 0$. La conclusione è che T_u è diagonalizzabile se e solo se $u = 0$.