**Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2020-21. Canale 3.**
**Prof. P. Piazza**
**Compito a casa del 4/12/2020**

**Esercizio 1.** Sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} .$$

**1.1.** Determinare gli autovalori di $L_A$.
**1.2.** Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati.
**1.3.** Per ogni autospazio determinare una base.
**1.4.** Spiegare perché esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per $L_A$. Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?
**1.5.** Scrivere la matrice associata a $L_A$ nella base di cui in 1.4.
**1.6.** Determinare una matrice invertibile $M$ tale che $M^{-1} A M$ sia diagonale.

**Esercizio 2.** Rifare l'Esercizio 1 ma per l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} .$$

**Esercizio 3.** Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

**3.1.** Verificare che $L_A$ ha un unico autovalore e determinarne la molteplicità algebrica.
**3.2.** Determinare equazioni cartesiane per l' autospazio associato a tale autovalore; determinare la molteplicità geometrica di tale autovalore.
**3.3.** Stabilire se $L_A$ è diagonalizzabile.

**Esercizio 4.** Sia

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Stabilire se $L_A$ è diagonalizzabile.

**Esercizio 5.** Sia $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e consideriamo l'applicazione $F : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ che associa ad $A$ la sua trasposta:

$$F(A) := A^t .$$

Sappiamo che $F$ è un'applicazione lineare.
**5.1.** Determinare la matrice associata ad $F$ nella base canonica $\mathcal{E}$ di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ [1]:

$$\mathcal{E} := \left\{ \underline{e}_1 := \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \underline{e}_2 := \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \underline{e}_3 := \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \underline{e}_4 := \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} .$$

[1] Con ciò si intende che tale base è scelta come base di partenza e come base di arrivo.

**5.2** Determinare gli autovalori di $F$ e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
**5.3** Stabilire se $F$ è diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una base diagonalizzante e la matrice associata ad $F$ in questa base.