Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2013-14. Canale 3
Prof. P. Piazza

Compito a casa del 4/12/2020. Soluzione.

Esercizio 1. *Sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice:*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} .$$

1.1. *Determinare gli autovalori di L_A.*

Soluzione 1.1. Abbiamo visto che gli autovalori di L_A sono le radici del polinomio caratteristico $P_{L_A}(\lambda)$. La matrice associata a L_A nella base canonica è proprio A e quindi $P_{L_A}(\lambda) = P_A(\lambda)$ con

$$P_A(\lambda) = det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} .$$

Calcolando il determinante otteniamo: $P_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda)$. Ne segue che L_A ha autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2\,, \lambda_3 = 4$.

1.2. *Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati.*

Soluzione 1.2. Vi ricordo che l'autospazio V_λ associato ad un autovalore λ è dato da

$$V_\lambda = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, L_A\underline{x} = \lambda\underline{x}\} \equiv \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, A\underline{x} = \lambda\underline{x}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,; (A - \lambda \mathrm{I}_3)\underline{x} = \underline{0}\} .$$

Quindi $V_0 = \{\underline{x}\,;\, A\underline{x} = \underline{0}\} = \mathrm{Ker}L_A$; questo sottospazio sappiamo già calcolarlo ed otteniamo

$$V_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \}$$

Passiamo a V_2; la matrice $A - 2\mathrm{I}_3$ è data da

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$V_2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\,; \begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \}$$

Procedendo analogamente si trova:

$$V_4 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \}$$

1.3. *Per ogni autospazio determinare una base.*

Soluzione 1.3. In questo caso ogni autospazio è una retta (ognuno dei 3 sistemi è un sistema lineare omogeneo di 2 equazioni in 3 incognite e di rango 2). Risolvendo i sistemi si trova

$$V_0 = \mathbb{R}(0,-3,1)\,, \quad V_2 = \mathbb{R}(4,9,3)\,, \quad V_4 = \mathbb{R}(0,1,1)\,.$$

1.4. *Verificare che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per L_A. Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?*

Soluzione 1.4. I vettori generatori dei 3 autospazi sono linearmente indipendenti perché abbiamo visto che *autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.* Nel nostro caso gli autovalori sono distinti e possiamo concludere. Quindi *una* base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di L_A è

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1)\,, \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3)\,, \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1)$$

Questa base **non** è ovviamente unica; possiamo scegliere 3 generatori diversi nelle 3 rette di autovettori V_0, V_2, V_4 e ottenere così una diversa base di autovettori. Ad esempio

$$\underline{w}_1 = (0, 6, -2)\,, \quad \underline{w}_2 = (4\pi, 9\pi, 3\pi)\,, \quad \underline{w}_3 = (0, \sqrt{39}, \sqrt{39})\,.$$

1.5. *Scrivere la matrice associata a L_A nella base di cui in 1.4.*

Soluzione 1.5. Come spiegato in dettaglio a lezione la matrice associata ad L_A in una base di autovettori è proprio la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori di L_A (nell'ordine dato dall'ordine degli autovettori). In questo caso, per la base

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1) \in V_0\,, \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3) \in V_2\,, \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1) \in V_4$$

otteniamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Denotiamo con $\mathcal{B}$ questa base di autovettori, quindi

$$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1 = (0, -3, 1), \underline{v}_2 = (4, 9, 3), \underline{v}_3 = (0, 1, 1)\}$$

1.6 *Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}\, A\, M$ sia diagonale.*

Soluzione 1.6. Abbiamo a questo punto due basi di $\mathbb{R}^3$; la base canonica e la base di autovettori $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1 = (0, -3, 1), \underline{v}_2 = (4, 9, 3), \underline{v}_3 = (0, 1, 1)\}$. Sia M la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{v}_j$ nella base canonica: questa è la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica $\mathcal{E}$ alla base di autovettori $\mathcal{B}$, denotata $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$.

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Sappiamo che la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A)$ associata a L_A nella nuova base è data da

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A) &= M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(L_A) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \\ &= (M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}))^{-1} \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(L_A) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \\ &= (M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}))^{-1} \cdot A \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \end{aligned}$$

D'altra parte abbiamo già calcolato la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A)$ utilizzando l'informazione che la base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di autovettori ed abbiamo trovato

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

In definitiva, la matrice $M := M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ è tale che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

come si voleva.

Esercizio 2. *Rifare l'Esercizio 1 ma per l'operatore $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice*

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Soluzione esercizio 2. Il polinomio caratteristico di L_A è $P_{L_A}(\lambda) \equiv P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$ che ha ovviamente radici $\lambda_1 = 1$ *con molteplicità algebrica 2* e $\lambda_2 = -1$ con *con molteplicità algebrica 1* . Gli autospazi sono

$$V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$$

e

$$V_{-1} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \}$$

Quindi

$$V_1 = \mathrm{Span}((1,0,-1),(2,1,0))\,, \quad V_{-1} = \mathbb{R}(1,0,1)\,.$$

Questi 3 vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per L_A, come segue facilmente dalla teoria sviluppata a lezione. Notate che possiamo scegliere una qualsiasi coppia di vettori non proparzionali del piano V_1; questi due vettori insieme ad un generatore di V_{-1} costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori.
La matrice associata a L_A nella base di autovettori è la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

La matrice M che ha come colonne le coordinate, nella base canonica, degli autovettori, e cioè la matrice

$$M \equiv M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ha la proprietà che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 3. *Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3.1. *Verificare che L_A ha un unico autovalore e determinarne la molteplicità algebrica.*

3.2. *Determinare equazioni cartesiane per l' autospazio associato a tale autovalore; determinare la molteplicità geometrica di tale autovalore.*
3.3. *Stabilire se L_A è diagonalizzabile.*

Soluzione esercizio 3. Sia $T := L_A$. Si ha $P_T(\lambda) = (-\lambda)^3$ e quindi T ha un solo autovalore, $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica uguale a 3. L'autospazio associato a questo autovalore è $\operatorname{Ker} T$ ed ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

e quindi $\operatorname{Ker} T = \mathbb{R}(1, 0, 0)$. Ne segue che la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ è uguale ad 1. Ne segue che T non è diagonalizzabile.[1]

Esercizio 4. *Sia*

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Stabilire se L_A è diagonalizzabile.

Soluzione esercizio 4. Un semplice calcolo mostra che

$$P_T(\lambda) = -(\lambda - 1)^2 \lambda\,;$$

T ammette quindi l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 1 e l'autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica uguale a 2. Si ha inoltre $V_T(0) = \mathbb{R}(1, -1, -1)$, $V_T(1) = \mathbb{R}(-2, 2, 1)$. Ne segue che T non è diagonalizzabile perché la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ è strettamente minore della sua molteplicità algebrica.

Esercizio 5. *Sia $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e consideriamo l'applicazione $F : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ che associa ad A la sua trasposta:*

$$F(A) := A^t\,.$$

Sappiamo che F è un'applicazione lineare.
5.1. *Determinare la matrice associata ad F nella base canonica $\mathcal{E}$ di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$* [2]*:*

$$\mathcal{E} := \left\{ \underline{e}_1 := \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \underline{e}_2 := \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \underline{e}_3 := \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \underline{e}_4 := \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}.$$

5.2 *Determinare gli autovalori di F e la loro molteplicità algebrica e geometrica.*
5.3 *Stabilire se F è diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una base diagonalizzante e la matrice associata ad F in questa base.*

Soluzione esercizio 5.
Soluzione 5.1. Per definizione si ha

$$F(\underline{e}_1) = \underline{e}_1\,,\quad F(\underline{e}_2) = \underline{e}_3\,,\quad F(\underline{e}_3) = \underline{e}_2\,,\quad F(\underline{e}_4) = \underline{e}_4\,.$$

---

[1] Possiamo decidere subito che T non è diagonalizzabile ragionando come segue: se T fosse diagonalizzabile allora $\operatorname{Ker}T$ dovrebbe essere l'intero spazio $\mathbb{R}^3$ e quindi T risulterebbe essere l'applicazione nulla, il che non è (perché ad esempio $T(\underline{e}_2) = \underline{e}_1$ per definizione).

[2] Con ciò si intende che tale base è scelta come base di partenza e come base di arrivo.

Quindi

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Soluzione 5.2 + 5.3.
Direttamente dalla definizione e dall'espressione di $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F)$ segue che

$$P_F(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-1)(1-\lambda) = -(1-\lambda)(1-\lambda)(\lambda+1)(1-\lambda) = -(1-\lambda)^3(1+\lambda)$$

e quindi F ammette gli autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ con molteplicità algebrica rispettivamente uguale a 3 ed uguale ad 1.
Osserviamo che la molteplicità algebrica $\mu(-1)$ di $\lambda = -1$ è sicuramente uguale alla sua molteplicità geometrica $\nu(-1)$; infatti $0 < \nu(-1)$ (perché per definizione gli autovettori sono non nulli) e $\nu(-1) \leq 1 = \mu(-1)$, da cui necessariamente $\nu(-1) = 1 = \mu(-1)$. *Questo ragionamento si applica ogni qual volta la molteplicità algebrica è uguale a 1.*
Per decidere se F è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione di V_1: $V_1 = \mathrm{Ker}(F - \mathrm{Id}_V)$ che corrisponde al sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dato da $\mathrm{Ker}(A - I_4)$ con $A = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F)$. Ma

$$A - I_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

che ha rango 1. Quindi $\dim(\mathrm{Ker}(F - \mathrm{Id}_V)) = 4 - 1 = 3$. Riassumendo,

$$\nu(-1) = 1 = \mu(-1) \quad \nu(1) = 3 = \mu(1)$$

(che era quello che era chiesto in **5.2**) e possiamo quindi concludere che F è diagonalizzabile.
Nelle coordinate associate alla base $\mathcal{E}$ l'autospazio $V_1 \equiv \mathrm{Ker}(A - I_4)$ ha equazione cartesiana $-x_2 + x_3 = 0$ ed una sua base è data dai vettori di coordinate

$$(1,0,0,0)\,, \quad (0,1,1,0)\,, \quad (0,0,0,1)\,.$$

Ne segue che una base di V_1 è data dalle matrici

$$\underline{v}_1 := \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \underline{v}_2 := \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \underline{v}_3 := \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Per quel che concerne V_{-1}: esso corrisponde a $\mathrm{Ker}(A + I_4)$ e cioè al nucleo della matrice

$$A + I_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Ne segue che V_{-1} ha equazioni cartesiane nelle coordinate determinate da $\mathcal{E}$ date da

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}$$

ed un suo generatore è dato quindi dal vettore di coordinate $(0, 1, -1, 0)$. Concludiamo che si ha $V_{-1} = \mathbb{R}\underline{v}_4$, con

$$\underline{v}_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Una base di autovettori è quindi data da

$$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}.$$

Questa è una base diagonalizzante e si ha

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(F) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$