Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 27/11/20. Soluzioni.

Esercizio 1. Consideriamo $V = \mathbb{R}_2[t]$ e l'applicazione $T : V \to V$ che associa ad un polinomio la sua derivata: $T(p) := p'$. Sappiamo che T è lineare. Determinare la matrice associata a T nella base canonica di V: $\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}$.
Calcolare $\det T$.

Soluzione. Poniamo $\underline{e}_1 = 1$, $\underline{e}_2 = t$, $\underline{e}_3 = t^2$ Dobbiamo determinare la matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$; questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $T(\underline{e}_j)$ nella base $\mathcal{E}$. Si ha:
$T(\underline{e}_1) = (1)' =$ polinomio nullo $= 0\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2 + 0\underline{e}_3$;
$T(\underline{e}_2) = (t)' = 1 = 1\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2 + 0\underline{e}_3$;
$T(\underline{e}_3) = (t^2)' = 2t = 0\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + 0\underline{e}_3$.
Quindi

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Per definizione $\det(T) = \det(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T))$ con $\mathcal{B}$ una qualsiasi base di V. Prendiamo in particolare $\mathcal{B} = \mathcal{E}$ e otteniamo che $\det(T) = 0$.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla proiezione P sul piano π di equazione $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ parallelamente alla retta $r := \mathrm{Span}(1, 2, 1)$ (scriveremo brevemente $\mathbb{R}(1, 2, 1)$ per questa retta).
Suggerimento: c'è una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ per cui la matrice associata a P è estremamente facile a scriversi. Qual è questa base ?[1] Una volta scritta la matrice associata a P in questa "base speciale", l'esercizio può essere completato utilizzando la formula magica.

Soluzione. Per trovare la matrice associata a P nella base canonica ragioniamo come segue. Consideriamo una base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ fatta nel seguente modo: $\underline{g}_1$ e $\underline{g}_2$ sono vettori di π, mentre $\underline{g}_3$ è un vettore di r. Allora, per definizione di proiezione su un piano di $\mathbb{R}^3$ parallelamente ad una retta data, si ha

$$P(\underline{g}_1) = \underline{g}_1;\ P_2(\underline{g}_2) = \underline{g}_2;\ P(\underline{g}_3) = \underline{0}.$$

Riscriviamo queste relazioni come segue:
$P(\underline{g}_1) = 1\underline{g}_1 + 0\underline{g}_2 + 0\underline{g}_3$
$P(\underline{g}_2) = 0\underline{g}_1 + 1\underline{g}_2 + 0\underline{g}_3$
$P(\underline{g}_3) = 0\underline{g}_1 + 0\underline{g}_2 + 0\underline{g}_3$.
Ne segue che la matrice che rappresenta la proiezione P rispetto alla base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ scelta sia come base di partenza che di arrivo è la matrice

$$M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

[1] Per rispondere a questa domanda interrogatevi su come agisce P sui vettori del piano π e sui vettori della retta r. Vedere l'esercizio 5 del compito del 30/10.

La matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P)$ che rappresenta la proiezione P nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ si ottiene a partire da $M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(P)$ attraverso la formula magica:

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P) = M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(P) \cdot M_{\mathcal{G},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$$

In questa formula $M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{Id})$ è la matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. La matrice $M_{\mathcal{G},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$ a destra è l'inversa di $M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{Id})$. Notare che le due matrici sono simili, come già sappiamo.
Per determinare esplicitamente $M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{Id})$ dobbiamo determinare *esplicitamente* una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$. Come abbiamo detto, i vettori $\underline{g}_1$ e $\underline{g}_2$ devono formare una base di π. Li determiniamo pertanto risolvendo l'equazione che definisce π: da $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ricaviamo $x_1 = x_2 + x_3$, ovvero

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2\}$ per π è pertanto

$$\underline{g}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \qquad \underline{g}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

In alternativa, troviamo due soluzioni non-proporzionali dell'equazione del piano.
Infine, $\underline{g}_3$ deve essere un vettore (non nullo) appartenente alla retta r. È chiaro che una possibile scelta di $\underline{g}_3$ è

$$\underline{g}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Con queste scelte di $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$ troviamo

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

ovvero, nelle coordinate x_1, x_2, x_3 di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica, la proiezione P_2 è l'applicazione lineare

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_1 - x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{vmatrix}$$

Osserviamo che abbiamo allora

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

come deve essere.
Osservazione. Avremmo anche potuto considerare la formula:

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P) = M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(P) \cdot M_{\mathcal{G},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$$

La prima matrice a destra è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $P(\underline{g}_j)$ nella base canonica. Ma $P\underline{g}_1 = \underline{g}_1 = 1\underline{e}_1 + 1\underline{e}_2 + 0\underline{e}_3$ e quindi la prima colonna di $M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(P)$ è data da $(1, 1, 0)$. Analogamente, la seconda colonna di $M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(P)$ è data da $(1,0,1)$. Dato che $P(\underline{g}_3) = \underline{0}$ abbiamo che la terza colonna di $M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(P)$ è la colonna nulla. La matrice $M_{\mathcal{G},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$ si determina come sopra.

Esercizio 3. Utilizzando un opportuno sviluppo di Laplace, calcolare

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e determinare per quali valori di k la matrice è invertibile.

Soluzione. Sviluppando mediante la formula di Laplace rispetto alla prima riga troviamo

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Sviluppiamo adesso rispetto alla terza riga:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \det \begin{vmatrix} k & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \det \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(k-1) - (-1-k) = 3k - 1.$$

Una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero, pertanto la matrice data è invertibile se e solo se $k \neq 1/3$.

Esercizio 4. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a & b & l & m \\ c & d & n & p \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix}.$$

Dimostrare che

$$\det A = \det B = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Soluzione. Calcoliamo il determinante di A. Sviluppiamo il determinante di A rispetto alla prima riga mediante la formula di Laplace:

$$\det A = \det \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix} = a \det \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ f & g & h \\ y & z & w \end{vmatrix} - b \det \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ e & g & h \\ x & z & w \end{vmatrix}$$

Sviluppando ancora mediante la regola di Laplace rispetto alla prima riga troviamo

$$\det A = ad \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} - bc \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

$$= (ad - bc) \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Il determinante di B si calcola in modo perfettamente analogo, sviluppando rispetto alla prima colonna. In alternativa, il determinante di B è uguale al determinante della sua trasposta, che ha la stessa struttura di A.

Esercizio 5. Calcolare l'inversa della matrice dell'esempio 7.7 utilizzando il contenuto dell'esercizio 9.18.
Soluzione. Basta applicare la definizione e fare i conti. Ometto i dettagli.