Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 20/11/20

Esercizio 1. Verificare che la matrice
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
è invertibile. Calcolarne l'inversa.
Sia $L = L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da A. Spiegare perché L_A è invertibile; calcolare l'inversa di L_A.
Calcolare l'immagine tramite l'applicazione inversa del vettore $(3, -1, 2)$. Risolvere il sistema
$$A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} .$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\{\underline{e}_1 := (1,0), \underline{e}_2 := (0,1)\}$ fissata; vi faccio notare che le coordinate di $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica sono proprio $\underline{x}$. Consideriamo una seconda base di $\mathbb{R}^2$ data da
$$\underline{v}_1 = (1,1)\,, \quad \underline{v}_2 = (1,-1)$$
e siano (y_1, y_2) le coordinate associate a questa base.
Determinare le formule di cambiamento di coordinate
$$\underline{x} = B\underline{y}\,, \quad \underline{y} = C\underline{x}$$
Che relazione c'è fra B e C ?
Come scriviamo B e C con le notazioni magiche ?
Sia U il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 = 0$. Determinare l'equazione cartesiana di U nelle coordinate (y_1, y_2).

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo nuovamente l'applicazione lineare definita da
$$F(1,1,0) = (1,2,-1)\,, \quad F(0,1,1) = (-1,1,1)\,, \quad F(0,0,1) = (-1,0,1),$$
si veda l'Esercizio 3 del 30/10 [1].
Consideriamo la base canonica
$$\mathcal{E} = \{\underline{e}_1 := (1,0,0), \underline{e}_2 := (0,1,0), \underline{e}_3 := (0,0,1)\}$$
in $\mathbb{R}^3$.
Utilizzando la linearità di F, determinare la matrice A associata ad F con la seguente scelta di basi
$$\text{base di partenza} = \mathcal{E}\,, \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E}$$
Abbiamo già risolto questo esercizio....
Come si scrive la matrice A nelle notazioni magiche ?

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata. Consideriamo $\{\underline{g}_1 = (2,0,1)\,, \underline{g}_2 = (1,3,0)\,, \underline{g}_3 = (0,1,2)\}$. È subito visto che questi

[1] i tre vettori $\{\underline{e}'_1 := (1,1,0); \underline{e}'_2 = (0,1,1); \underline{e}'_3 = (0,0,1)\}$ sono una base $\mathcal{E}'$ di $\mathbb{R}^3$

3 vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Sia P l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ univocamente determinata da

$$(1) \qquad P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,,$$

Utilizzando la linearità di P determinare la matrice A associata a P in questa base (quindi, base di partenza = base di arrivo = base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2\, \underline{g}_3\}$).
Come si scrive la matrice A nelle notazioni magiche ?

Esercizio 5 . Sia $V = \mathbb{R}^2$. Verificare che i seguenti 2 vettori sono una base di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{v}_1 = (1, 2)\,, \quad \underline{v}_2 = (-1, 1).$$

Verificare che i seguenti 2 vettori sono un'altra base di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{u}_1 = (1, 1)\,, \quad \underline{u}_2 = (1, 0)$$

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \quad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2$$

5.1 (Immediato dalla definizione.) Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$
Come si scrive questa matrice nelle notazioni magiche ?

Utilizzando opportune matrici di cambiamento di base ed utilizzando eventualmente le nostre magiche notazioni, risolvere i seguenti esercizi:

5.2 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

5.3 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

5.4 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

Esercizio 6. Ritornate all'esercizio 3: scrivete la matrice A' associata ad F con scelta di base $\mathcal{E}' := \{\underline{e}'_1 := (1, 1, 0); \underline{e}'_2 = (0, 1, 1); \underline{e}'_3 = (0, 0, 1)\}$ in partenza e base canonica $\mathcal{E}$ in arrivo (è immediato trovare la matrice A'....).
Ritrovate la soluzione dell'esercizio 3 utilizzando questa matrice A' ed una opportuna matrice di cambiamento di base.

Esercizio 7. Ritornate all'esercizio 4: scrivete la matrice A' associata a P con scelta di base canonica $\mathcal{E}$ in partenza e base $\mathcal{G}$ in arrivo (è immediato trovare la matrice A'....).
Ritrovate la soluzione dell'esercizio 4 utilizzando questa matrice A' ed una opportuna matrice di cambiamento di base.