Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 20/11/20. Soluzione.

Esercizio 1. Verificare che la matrice

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

è invertibile. Calcolarne l'inversa.
Sia $L = L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da A. Spiegare perché L_A è invertibile; calcolare l'inversa di L_A.
Calcolare l'immagine tramite l'applicazione inversa del vettore $(3, -1, 2)$. Risolvere il sistema

$$A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} .$$

Soluzione esercizio 1. Una matrice $n \times n$ è invertibile se e solo se è non-singolare, cioè se e solo se il rango è uguale a n. Utilizzando la riduzione di Gauss si verifica facilmente che per la nostra matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$ si ha $\mathrm{rg}(A) = 3$. La matrice data è quindi invertibile. Per determinare l'inversa scriviamo

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

e applichiamo Gauss a scendere, Gauss a salire e la divisione per i pivots. Otteniamo

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/7 & 1/7 & -2/7 \\ 0 & 1 & 0 & -2/7 & -3/7 & 6/7 \\ 0 & 0 & 1 & -1/7 & 2/7 & 3/7 \end{array}\right|$$

Ne segue che

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 3/7 & 1/7 & -2/7 \\ -2/7 & -3/7 & 6/7 \\ -1/7 & 2/7 & 3/7 \end{vmatrix}$$

L'inversa di L_A è data da $L_{A^{-1}}$. L'immagine di $(3, -1, 2)$ tramite $L_{A^{-1}}$ è data dal prodotto

$$A^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Questa è anche la soluzione del sistema

$$A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Infatti: sappiamo che il sistema $A\underline{x} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}^T$ ammette un'unica soluzione $\underline{x}_0$ (perché la matrice ha rango 3); per determinarla partiamo dalla relazione

$$A\underline{x}_0 = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} ;$$

moltiplicando a sinistra ambo i membri per A^{-1} otteniamo

$$A^{-1} \cdot (A\underline{x}_0) = A^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

ed utilizzando l'associatività ed il fatto che $A^{-1} \cdot A = I_3$ otteniamo finalmente

$$\underline{x}_0 = A^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\{\underline{e}_1 := (1,0), \underline{e}_2 := (0,1)\}$ fissata; vi faccio notare che le coordinate di $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica sono proprio $\underline{x}$. Consideriamo una seconda base di $\mathbb{R}^2$ data da

$$\underline{v}_1 = (1,1)\,, \quad \underline{v}_2 = (1,-1)$$

e siano (y_1, y_2) le coordinate associate a questa base.
Determinare le formule di cambiamento di coordinate

$$\underline{x} = B\underline{y}\,, \quad \underline{y} = C\underline{x}$$

Che relazione c'è fra B e C ?
Come scriviamo B e C con le notazioni magiche ?
Sia U il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 = 0$. Determinare l'equazione cartesiana di U nelle coordinate (y_1, y_2).

Soluzione esercizio 2. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ e sia $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. La matrice B del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è *la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate del j-mo vettore della base $\mathcal{B}'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$*. Nel nostro caso

$$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2\,, \quad \underline{v}_2 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$$

e quindi

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ne segue, per quanto visto a lezione che

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

da cui segue anche

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

(e quindi $C = B^{-1}$.) Calcoliamo l'inversa dell matrice $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ mediante l'algoritmo di Gauss:

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| \to \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right| \to \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right| \to$$

$$\to \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right|$$

Abbiamo cioè

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Nelle notazioni magiche abbiamo

$$B = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})\,, \quad C = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}))^{-1}\,.$$

Sia infine U il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 = 0$. Sostituendo, vediamo che il sottospazio U ha equazione $(y_1 + y_2) - 2(y_1 - y_2) = 0$ e cioè $-y_1 + 3y_2 = 0$ nelle coordinate (y_1, y_2).

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo l'applicazione lineare definita da

$$F(1,1,0) = (1,2,-1)\,, \quad F(0,1,1) = (-1,1,1)\,, \quad F(0,0,1) = (-1,0,1),$$

(Notare che i tre vettori $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1 := (1,1,0); \underline{v}_2 := (0,1,1); \underline{v}_3 := (0,0,1)\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$. Notare anche che, per questioni tipografiche, ho leggermente cambiato la notazione del testo in queste soluzioni.)
Consideriamo la base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{E} = \{\underline{e}_1 := (1,0,0), \underline{e}_2 := (0,1,0), \underline{e}_3 := (0,0,1)\}\,.$$

Utilizzando la linearità di F, determinare la matrice A associata ad F con la seguente scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E}\,, \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E}$$

Come si scrive la matrice A nelle notazioni magiche ?

Soluzione esercizio 3. La matrice associata ad F con questa scelta di basi,

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E}\,, \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E}\,,$$

è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $F(\underline{e}_j)$ nella base canonica $\mathcal{E}$. Per determinare $F(1,0,0)$, $F(0,1,0)$, $F(0,0,1)$ possiamo esprimere i vettori $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$ in funzione di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ e applicare la linearità. Si ha

$$(1,0,0) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 + \underline{v}_3\,, \quad (0,1,0) = \underline{v}_2 - \underline{v}_3\,, \quad (0,0,1) = \underline{v}_3\,. \tag{1}$$

Ne segue che, per linearità,

$$F(1,0,0) = F(\underline{v}_1 - \underline{v}_2 + \underline{v}_3) = F(\underline{v}_1) - F(\underline{v}_2) + F(\underline{v}_3) = (1,2,-1) - (-1,1,1) + (-1,0,1)$$

e quindi

$$F(1,0,0) = (1,1,-1)\,.$$

Analogamente,

$$F(0,1,0) = F(\underline{v}_2 - \underline{v}_3) = F(\underline{v}_2) - F(\underline{v}_3) = (-1,1,1) - (-1,0,1) = (0,1,0)$$
$$F(0,0,1) = F(\underline{v}_3) = (-1,0,1)$$

Quindi la matrice cercata è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Questa è la matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F)$ nelle notazioni magiche.

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata. Consideriamo $\{\underline{g}_1 = (2,0,1)\,, \underline{g}_2 = (1,3,0)\,, \underline{g}_3 = (0,1,2)\}$. È subito visto che questi 3 vettori costituiscono una base $\mathcal{G}$ di $\mathbb{R}^3$. Sia P l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ univocamente determinata da

$$P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \tag{2}$$

Utilizzando la linearità di P determinare la matrice A associata a P in questa base (quindi, base di partenza = base di arrivo = base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2\, \underline{g}_3\}$).
Come si scrive la matrice A nelle notazioni magiche ?

Soluzione esercizio 4. La matrice associata a P rispetto alla base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2\, \underline{g}_3\}$ ha come colonne le coordinate di $P(\underline{g}_1), P(\underline{g}_2)$ e $P(\underline{g}_3)$ rispetto alla base $\mathcal{G}$. Utilizziamo la linearità, come suggerito, e calcoliamo

$$\begin{aligned}
P(\underline{g}_1) = P(2\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = 2P(\underline{e}_1) + P(\underline{e}_3) &= 2(2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3) + (\underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\
&= 5\underline{g}_1 + \underline{g}_2 - 3\underline{g}_3 \\
P(\underline{g}_2) = P(\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2) = P(\underline{e}_1) + 3P(\underline{e}_2) &= (2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3) + 3(\underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\
&= 2\underline{g}_1 + 3\underline{g}_2 + \underline{g}_3 \\
P(\underline{g}_3) = P(\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3) = P(\underline{e}_2) + 2P(\underline{e}_3) &= (\underline{g}_2 + \underline{g}_3) + 2(\underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\
&= 2\underline{g}_1 + 3\underline{g}_2 + 3\underline{g}_3
\end{aligned}$$

La matrice che rappresenta P nella base $\mathcal{G}$ è pertanto

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Nella notazione magica questa è la matrice $M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(P)$

Esercizio 5 . Sia $V = \mathbb{R}^2$. Verificare che i seguenti 2 vettori sono una base di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{v}_1 = (1, 2)\,, \quad \underline{v}_2 = (-1, 1).$$

Verificare che i seguenti 2 vettori sono un'altra base di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{u}_1 = (1, 1)\,, \quad \underline{u}_2 = (1, 0)$$

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \quad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2$$

5.1 (Immediato dalla definizione.)
Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$
Come si scrive questa matrice nelle notazioni magiche ?

Utilizzando opportune matrici di cambiamento di base ed utilizzando eventualmente le nostre magiche notazioni, risolvere i seguenti esercizi:

5.2 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

5.3 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

5.4 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

Soluzione esercizio 5. Diamo un nome a queste due basi:
chiamiamo $\mathcal{V} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ e chiamiamo $\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$
Il testo dell'esercizio fornisce l'informazione

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \qquad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2\,;$$

questo vuol dire che il testo dell'esercizio fornisce la matrice richiesta in **5.1**, e cioè la matrice associata a T con la scelta di basi:

$$\text{base partenza} = \mathcal{V} \equiv \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}\,, \quad \text{base arrivo} = \mathcal{U} \equiv \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}.$$

Questa è la matrice

$$M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(T)$$

nella notazione magica. Infatti, per definizione, $M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(T)$ è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $T\underline{v}_j$ rispetto alla base $\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$. Quindi direttamente dal testo dell'esercizio si ha

$$M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Si tratta ora di utilizzare la formula magica vista a lezione per la matrice associata ad una composizione di due o anche tre applicazioni lineari per trovare le matrici richieste in **5.2, 5.3, 5.4.**

Cominciamo con **5.2**. Il testo dell'esercizio ci chiede la matrice associata a T con la scelta di basi $\mathcal{V}$ in partenza e ancora $\mathcal{V}$ in arrivo. Dobbiamo quindi determinare $M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(T)$. In **5.1** abbiamo determinato $M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(T)$ e ovviamente abbiamo interesse ad utilizzare questa informazione.
La formula magica ci dice che

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(T) \equiv M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\mathrm{Id} \circ T) = M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(T)$$

Notare come la notazione suggerisca la soluzione.
$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$ è la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{u}_1$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{u}_2$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. Impostando il sistemino $(1,1) = \alpha(1,2) + \beta(-1,1)$ e risolvendo scopriamo che

$$(1,1) = \frac{2}{3}(1,2) + (-\frac{1}{3})(-1,1)$$

Analogamente

$$(1,0) = \frac{1}{3}(1,2) + (-\frac{2}{3})(-1,1)$$

Ne segue [1] che

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

e quindi in definitiva

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(T) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 5/3 \\ 1/3 & -7/3 \end{vmatrix}$$

Passiamo a **5.3.** Viene chiesta la matrice associata a T con la seguente scelta di basi: base partenza $\mathcal{U}$; base arrivo $\mathcal{V}$. Questa è la matrice

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(T)$$

Conviene determinare questa matrice utilizzando la matrice in **5.2.** Dalla formula magica abbiamo

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(T) = M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(T) \cdot M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$$

[1] leggete anche l'osservazione alla fine della soluzione di questo esercizio per questa matrice $M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$

(Notare ancora una volta come la notazione suggerisca la soluzione.) Ora, queste due matrici nel membro a destra già le conosciamo, e quindi a questo punto basta fare il prodotto per ottenere $M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(T)$.

Consideriamo infine **5.4.** Vogliamo determinare $M_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(T)$. In questo caso conviene determinare la matrice utilizzando **5.1** oppure **5.3**. Facciamolo prima con **5.1**. Si ha

$$M_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(T) = M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(T) \cdot M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}).$$

e conosciamo entrambe le matrici a destra. La soluzione dell'esercizio è quindi completa (lascio a voi i conti).

Vediamo infine come ottenere $M_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(T)$ utilizzando $M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(T)$ e cioè **5.3**. La formula magica ci dice che

$$M_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(T) = M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(T).$$

Il secondo fattore a destra è la matrice determinata in **5.3**. Il primo fattore a destra non lo conosciamo ma è la matrice inversa di $M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$ che invece conosciamo. Possiamo calcolare l'inversa $(M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}))^{-1}$ e finire la soluzione dell'esercizio.

Osservazione. Abbiamo determinato $M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$ impostando due sistemi non omogenei in (α, β) e (γ, δ) e risolvendo. Avremmo potuto procedere diversamente. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Il testo del problema ci fornisce

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}) \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{E},\mathcal{V}}(\mathrm{Id})$$

Infatti, dal testo

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{E},\mathcal{V}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ma allora, dalla formula magica,

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}) = M_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$$

che riscriviamo come

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}) = (M_{\mathcal{E},\mathcal{V}}(\mathrm{Id}))^{-1} \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$$

Quindi

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}) = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} .$$

Calcolando l'inversa e facendo il prodotto riotteniamo $M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$.

Esercizio 6. Ritornate all'esercizio 3: scrivete la matrice A' associata ad F con scelta di base $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1 := (1,1,0); \underline{v}_2 = (0,1,1); \underline{v}_3 = (0,0,1)\}$ in partenza e base canonica $\mathcal{E}$ in arrivo (è immediato trovare la matrice A'....).

Ritrovate la soluzione dell'esercizio 3 utilizzando questa matrice A' ed una opportuna matrice di cambiamento di base.

Soluzione esercizio 6. Faremo uso della formula magica. Consideriamo la base

$$\mathcal{B} := \{\underline{v} = (1,1,0) \quad \underline{v}_2 = (0,1,1)\,, \quad \underline{v}_3 = (0,0,1)\}$$

I dati del problema forniscono immediatamente la matrice A' associata ad F rispetto alla seguente scelta di basi:

$$\text{base di partenza} = \mathcal{B}\,, \quad \text{base di arrivo} = \text{base canonica} \equiv \mathcal{E}\,.$$

Nella notazione magica questa è la matrice

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(F)\,.$$

Tale matrice è, per definizione, la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate, nella base di arrivo, del vettore $F(\underline{v}_j)$; ma questa è proprio l'informazione che ci viene data dal testo del problema. Quindi

$$A' \equiv M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(F) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vogliamo ora determinare la matrice A associata ad F rispetto alla scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E} = \text{base canonica}, \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E} = \text{base canonica}.$$

Quindi

$$A = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F).$$

Dalla formula magica abbiamo

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F) = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(F) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}).$$

Abbiamo già determinato $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$ nella soluzione dell'esercizio 3, si veda la formula (1), dove abbiamo visto che

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Possiamo ora fare il prodotto e riottenere la soluzione dell'esercizio 3 (si veda più avanti, alla fine della soluzione).
Senza conoscere $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$ potremmo procedere come segue.
La matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$ è l'inversa della matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$, e cioè della matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ nella base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. Quest'ultima matrice è ben nota perché è data nel testo del problema

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) = (M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}))^{-1} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right)^{-1}$$

da cui, calcolando l'inversa,

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Concludendo

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Esercizio 7. Ritornate all'esercizio 4: scrivete la matrice A' associata a P con scelta di base canonica $\mathcal{E}$ in partenza e base $\mathcal{G}$ in arrivo (è immediato trovare la matrice A'....).
Ritrovate la soluzione dell'esercizio 4 utilizzando questa matrice A' ed una opportuna matrice di cambiamento di base.

Soluzione esercizio 7. La matrice $A' = M_{\mathcal{G},\mathcal{E}}(P)$ che rappresenta l'applicazione lineare P rispetto alla base canonica come base di partenza e alla base $\mathcal{G}$ come base di arrivo è la matrice data nel testo dell'esercizio:

$$M_{\mathcal{G},\mathcal{E}}(P) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice richiesta dall'esercizio è la matrice $A = M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(P)$ associata alla scelta $\mathcal{G}$ in partenza e in arrivo. Per la formula magica

$$M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(P) = M_{\mathcal{G},\mathcal{E}}(P) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{Id})$$

La matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{Id})$ è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori della base $\mathcal{G}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dai dati dell'esercizio abbiamo pertanto

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Otteniamo così nuovamente,

$$M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(P) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$