Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 6/11/20
Soluzioni.

Esercizio 1. Si consideri il sistema omogeneo di 3 equazioni in 6 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che trattasi di un sistema omogeneo a scala $S\underline{x} = \underline{0}$.
Determinare i pivots della matrice S. Determinare le variabili dipendenti del sistema e quelle libere. Risolvere il sistema. Sia Σ_0 l'insieme delle soluzioni. Spiegare perché Σ_0 è un sottospazio di $\mathbb{R}^6$. Determinare $k \in \mathbb{N}$ e k vettori linearmente indipendenti $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$ in $\mathbb{R}^6$ in modo tale che

$$\Sigma_0 = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$$

(È chiaro che $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$ è allora una base di $\Sigma_0 = \mathrm{Ker} S$.)
Determinare il rango di S. Determinare una base per $\mathrm{Im}\, S$.

Soluzione esercizio 1. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$S = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{vmatrix}$$

I pivot compaiono nella matrice in grassetto e sono:
$p_1 = 1$ nella colonna $j_1 = 1$
$p_2 = 1$ nella colonna $j_2 = 3$
$p_3 = 1$ nella colonna $j_3 = 5$.
Le variabili dipendenti sono quindi x_1, x_3, x_5. La variabili libere sono x_2, x_4, x_6. Da quanto visto a lezione il rango di S è 3 ed una base per $\mathrm{Im}\, S$ è costituita dalle colonne $S^{j_1}, S^{j_2}, S^{j_3}$, cioè dalle colonne S^1, S^3, S^5 .
Risolvendo all'indietro abbiamo

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 3x_4 + 2x_6 \\ x_3 = 2x_4 + 2x_6 \\ x_5 = x_6 \end{cases}$$

che possiamo riscrivire come

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 3x_4 + 2x_6 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + 2x_6 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_6 x_6 = x_6 \end{cases}$$

Quindi se Σ_0 denota l'insieme delle soluzioni, e cioè $\mathrm{Ker} L_S \equiv \mathrm{Ker} S$, si avrà

$$\underline{x} \in \Sigma_0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - 3x_4 + 2x_6 \\ x_2 \\ 2x_4 + 2x_6 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_6 \end{vmatrix} = x_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + x_4 \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Conclusione:

$$\Sigma_0 \equiv \mathrm{Ker} S = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Dato che $\dim \mathrm{Ker} S = 6 - \mathrm{rg} S = 6 - 3 = 3$ si ha subito che questi vettori sono una base di $\mathrm{Ker} S$ e cioè di Σ_0.

Esercizio 2. Si consideri il sistema *omogeneo* di 4 equazioni in 5 incognite

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Sia Σ_0 l'insieme delle soluzioni. Determinare una matrice A tale che $\Sigma_0 = \mathrm{Ker} A$.
Applicare il metodo di Gauss e determinare un sistema omogeneo *a scala*, $S\underline{x} = \underline{0}$, equivalente al sistema dato.
Determinare una base di Σ_0.

Soluzione esercizio 2. È chiaro che $\Sigma_0 = \mathrm{Ker} A$ con

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Applicando il metodo di Gauss sappiamo che $A\underline{x} = \underline{0}$ è equivalente al sistema $S\underline{x} = \underline{0}$ con

$$S = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

I pivots di questa matrice a scala sono $p_1 = 1$ nella colonna $j_1 = 1$, $p_2 = 1$ nella colonna $j_2 = 2$ e $p_3 = 2$ nella colonna $j_3 = 3$. Da quanto visto a lezione il rango di S è 3 ed una base per $\mathrm{Im}\, S$ è costituita dalle colonne $S^{j_1}, S^{j_2}, S^{j_3}$, cioè dalle colonne S^1, S^2, S^3 . Inoltre:

(i) $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Ker} S$ (equivalentemente, il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ è equivalente a $S\underline{x} = \underline{0}$)

(ii) $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg} S \,(= 3)$

(iii) le colonne $A^{j_1}, A^{j_2}, A^{j_3}$, cioè le colonne A^1, A^2, A^3, costituiscono una base per $\mathrm{Im}\, A$.

Tornando all'esercizio: $\Sigma_0 = \mathrm{Ker} A$ è ottenuto trovando $\mathrm{Ker} S$ che è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + 2\mathbf{x_3} + x_5 = 0 \\ \mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} - \frac{1}{4}x_4 = 0 \\ 2\mathbf{x_3} + \frac{1}{2}x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

con variabili dipendenti $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}$ e variabili libere x_4 e x_5. (Da ora in poi tralasceremo però la notazione in grassetto.) Risolvendo all'indietro il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -x_5 \\ x_2 + x_3 = \frac{1}{4}x_4 \\ 2x_3 = -\frac{1}{2}x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

otteniamo (controllate i conti)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{4}x_4 + x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{4}x_4 - x_5 \end{cases}$$

che è ovviamente equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{4}x_4 + x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{4}x_4 - x_5 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

Quindi

$$\mathrm{Ker}S = \left\{ \left| \begin{array}{c} \frac{1}{4}x_4 \\ \frac{1}{4}x_4 + x_5 \\ -\frac{1}{4}x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \right| \;,\; x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{x_4}{4} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{array} \right| + x_5 \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right| \;,\; x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Conclusione:

$$\Sigma_0 = \mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}S = \mathrm{Span}((1,1,-1,4,0),(0,1,-1,0,1))$$

ed è chiaro che questi due vettori sono una base per Σ_0.

Esercizio 3. Si consideri il sistema non-omogeneo di 4 equazioni in 5 incognite (ottenuto dal sistema omogeneo dell'esercizio precedente)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

3.0 Applicare il metodo di Gauss e determinare un sistema *a scala*, $S\underline{x} = \underline{c}$, equivalente al sistema dato.
3.1 Verificare che il sistema a scala $S\underline{x} = \underline{c}$ è compatibile. (Otteniamo quindi la compatibiltà del sistema iniziale.)
3.2 Sia Σ l'insieme delle soluzioni del sistema iniziale. Scrivere Σ nella forma

$$\Sigma = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_\ell) + \underline{v}_0$$

per un opportuno $\ell \in \mathbb{N}$ e per opportuni vettori $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_\ell, \underline{v}_0$ in $\mathbb{R}^5$, con $\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_\ell\}$ linearmente indipendenti [1]; verificate in questo modo che vale il teorema di struttura.

[1] *Suggerimento*: utilizzare l'esercizio precedente ....

Soluzione esercizio 3. Applicando Gauss a

$$A = \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right|$$

otteniamo

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Sia S la matrice 4×5 a sinistra (la stessa dell'esercizio precedente); sia

$$\underline{c} = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)\,.$$

Allora $S\underline{x} = \underline{c}$ è un sistema compatibile. Per quanto visto a lezione sappiamo che il nostro sistema non-omogeneo è equivalente al sistema $S\underline{x} = \underline{c}$; ne segue che il nostro sistema è compatibile e le sue soluzioni sono date dalle soluzioni di $S\underline{x} = \underline{c}$. Procedendo come nell'esercizio precedente, ma tenendo conto dei termini noti, otteniamo

$$\Sigma = \underline{v}_0 + \mathrm{Span}((1,1,-1,4,0),(0,1,-1,0,1))$$

con

$$\underline{v}_0 = (\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)\,.$$

Osservate che abbiamo verificato esplicitamente il Teorema di struttura: Σ è espresso come somma di una soluzione particolare del sistema, $\underline{v}_0$, e di tutte le soluzioni del sistema *omogeneo* associato.

Esercizio 4. Determinare una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^5$:

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$$

Soluzione esercizio 4. Notiamo innanzitutto che $W = \mathrm{Ker}A$ con $A \in M_{1,5}(\mathbb{R})$, $A = |1\ 0\ -1\ 1\ 1\,|$. Dato che A ha ovviamente rango uguale ad 1, ne segue che W ha dimensione $5 - \mathrm{rg}A = 4$. Per determinare una base di W risolviamo il sistema omogeneo di 1 equazione in 5 incognite che definisce W:
scriviamo quindi $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, \mathbf{x_1} = x_3 - x_4 - x_5\}$. Variabile dipendente: x_1. Variabili libere x_2, x_3, x_4, x_5. Quindi

$$W = \left\{ \left|\begin{array}{c} x_3 - x_4 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right|, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ne segue, ragionando come al solito, che

$$W = \mathrm{Span}\left(\left|\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right| \right)$$

Dato che W ha dimensione 4 ne segue che necessariamente i quattro vettori dati sono una base di W.

Esercizio 5. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Determinare basi di U e di V. Determinare una base per $U+V$ (È ovvio che $U+V$ ha come insieme di generatori i vettori ottenuti prendendo l'unione di generatori di U ed di generatori di V.) Stabilire se $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e V, cioè se $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Soluzione esercizio 5. Determiniamo innanzitutto basi per questi due sottospazi, utilizzando la riduzione a scala. Scopriamo che

$$U = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} \right).$$

È chiaro che queste due coppie di vettori sono basi rispettivamente per U e V. Consideriamo i $4 = 2 + 2$ vettori ottenuti prendendo l'unione delle due basi. Vogliamo estrarre una base (sicuramente sono un insieme di generatori per $U + V$). Di fatto essi sono sono linearmente indipendenti e quindi una base di $U + V$; per verificare questa affermazione basta mettere i 4 vettori in colonna e ridurre con Gauss. Scopriamo che il rango della relativa matrice 4×4 è proprio 4 (ci sono 4 pivot); ne segue che i 2+2=4 vettori sono linearmente indipendenti e quindi, necessariamente, una base di $U + V$ come volevasi. Per rispondere alla domanda sulla somma diretta. Vi ricordo che dobbiamo verificare se accade che $U+V = \mathbb{R}^4$ e $U \cap V = \underline{0}$. Già sappiamo che $U+V = \mathbb{R}^4$ ma allora applicando la formula di Grassmann scopriamo che si deve avere $\dim U \cap V = 0$, dato che $\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2+2-4$. Conclusione: $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Esercizio 6. Sia $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare ad essa associata. Determinare una base per $\text{Ker}(L_A)$ ed una base per $\text{Im}(L_A)$. Studiare iniettività e suriettività di L_A. Dire se L_A è bigettiva.

Soluzione esercizio 6 Sappiamo che

$$\text{Ker}(L_A) \equiv \text{Ker}A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid L_A(\underline{x}) = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{x} = \underline{0}\};$$

basta allora risolvere il sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ trovandone una base. Riducendo con Gauss, risolvendo il sistema a scala che ne risulta otteniamo che

$$\mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{Span}\left(\left| \begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right| \right).$$

Dato che il nucleo è non banale, ne segue che L_A non è iniettiva. Per il teorema della dimensione, dato che dimensione di $\mathrm{Ker}A = 2$, si ha che $\dim \mathrm{Im}\, A = 4 - 2 = 2$ Ne segue che L_A non è suriettiva.
Alternativamente, abbiamo visto che $\mathrm{Im}L_A$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A; la riduzione di Gauss, già effettuata, ci dice che i primi due vettori colonna di A sono una base per lo spazio generato dalle colonne di A. Dato che $\mathrm{Im}L_A$ non è tutto $\mathbb{R}^3$, essendo di dimensione 2, ne segue L_A non è suriettiva. Quindi L_A non è bigettiva.

Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi

Sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ o più in generale di $\mathbb{K}^n$. Supponiamo che U abbia **dimensione** ℓ.
Diremo che sono date **equazioni cartesiane** per U se è data una matrice $A \in M_{(n-\ell)\times n}(\mathbb{K})$ **di rango uguale a** $n - \ell$ tale che $U = \{\underline{x} \,|\, A\underline{x} = \underline{0}\}$; le equazioni cartesiane sono precisamente questo sistema di equazioni che hanno U come insieme soluzione. Non sono univocamente determinate. Notiamo che $(n - \ell)$ è il **numero minimo** di equazioni necessarie per descrivere U tramite un sistema in n incognite (ragionare con il teorema della dimensione).
Diremo che sono date **equazioni parametriche** per U se è data una base di U, $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_\ell\}$, con la quale sia possibile esprimere ogni vettore di U come

$$t_1\underline{u}_1 + t_2\underline{u}_2 + \cdots + t_\ell\underline{u}_\ell$$

per opportuni $t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{K}$. Le equazioni parametriche di U sono allora

$$\underline{x} = t_1\underline{u}_1 + t_2\underline{u}_2 + \cdots + t_\ell\underline{u}_\ell\,, \quad t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{K}\,.$$

Osserviamo che i sottospazi sono spesso dati come soluzioni di un sistema (non necessariamente costituito da un numero minimo di equazioni) oppure tramite un sistema di generatori (non necessariamente una base). Per determinare equazioni cartesiane occorre nel primo caso ridurre il sistema a scala [2] oppure, nel secondo caso, estrarre una base dall'insieme dei generatori di U.

Si passa da equazioni cartesiane ed equazioni parametriche determinando una base per $\mathrm{Ker}A$.
Si passa da equazioni parametriche (e quindi il dato di una base per U) ad equazioni cartesiane nel modo spiegato a pagina 119 del libro.

Esercizio 7. Sia $U = \mathrm{Ker}A$ con A uguale alla matrice dell'esercizio 6. Determinare equazioni cartesiane per U.
Determinare equazioni parametriche per U.

---

[2] ad esempio, ci sono altri metodi che vedremo più avanti nel corso

Soluzione esercizio 7. Sappiamo dall'esercizio precedente, che U ha dimensione 2. Quindi cerchiamo una matrice $B \in M_{(4-2)\times 4}(\mathbb{R}) \equiv M_{2\times 4}(\mathbb{R})$ tale che $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\underline{x} = \underline{0}\}$. Ora, A ha rango 2; quindi 2 è il massimo numero di righe linearmente indipendenti. È anche ovvio che le prime due righe sono linearmente indipendenti, perché non-proporzionali. Ne segue che equazioni cartesiane per U sono date

$$B\underline{x} = \underline{0}, \quad \text{con} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

(B è costituita dalle prime 2 righe di A.). In alternativa, riduciamo a scala ed abbiamo che $U = \{\underline{x} \mid S\underline{x} = \underline{0}\}$, un sistema omogeneo $(4-2)\times 4$ che fornisce equazioni cartesiane per U.
Per le equazioni parametriche, dobbiamo determinare una base per $U \equiv \mathrm{Ker}A$. Questo lo abbiamo già fatto ed abbiamo scoperto che

$$U := \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

con lo span costituito da vettori linearmente indipendenti. Ne segue che equazioni parametriche per U sono date da

$$\underline{x} = t_1 \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + t_2 \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 8. Sia $U \leq \mathbb{R}^4$ come nell'esercizio 5,

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \right).$$

Determinare equazioni cartesiane per U.

Soluzione esercizio 8. Prima di tutto determiniamo una base per U; questo lo abbiamo già fatto

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Ora, si veda pagina 119 del libro di testo, consideriamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix}$$

riduciamo con Gauss ed imponiamo la compatibilità.
Otteniamo

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Queste sono le equazioni cartesiane di U. Scritto diversamente

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\underline{x} = \underline{0}\} \quad \text{con} \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$