Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 30/10/20 .
SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{vmatrix}$$

L_A è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} L_A = \{\underline{0}\}$. Occorre allora calcolare

$$\operatorname{Ker} L_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid L_A\underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \}$$

Utilizzando Gauss è facile vedere che $\operatorname{Ker} L_A = \{\underline{0}\}$. Ne segue che L_A è iniettiva. Per il teorema della dimensione (andiamo da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$) è anche suriettiva. Ne segue che L_A è biettiva. L'immagine di $(1, 2, 1)$ è data sostituendo nella definizione di L_A,

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{vmatrix},$$

i valori 1,2 e 1 al posto di x_1, x_2 e x_3 rispettivamente. Otteniamo il vettore $(6, 3, 0)$. L'immagine del j-mo vettore della base canonica è la j-ma colonna della matrice A.

Soluzione esercizio 2.

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}$$

Per determinare la dimensione del nucleo troviamo prima una base per lo spazio immagine (in ogni caso questo è un quesito al quale dobbiamo rispondere). Sulla base delle soluzioni degli esercizi precedenti dobbiamo quindi determinare una base per lo spazio generato dalle colonne di A; il numero di elementi in questa base è per definizione la dimensione di $\operatorname{Im} L_A$ e si ha $\dim \operatorname{Ker} A = 3 - \dim \operatorname{Im} L_A \equiv 3 - \operatorname{rg}A$. Ora, le prime due colonne sono ovviamente linearmente indipendenti perché non-proporzionali. Dobbiamo quindi decidere se tutte e tre le colonne sono o meno linearmente indipendenti. Questo lo sappiamo fare perché il problema si riduce ad un sistema di 3 equazioni nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; si scopre che il sistema ha soluzioni non banali e quindi i 3 vettori non sono linearmente indipendenti. Ne segue che una base di $\operatorname{Im} L_A$ è costituita dalle prime due colonne. In particolare $\dim \operatorname{Im} L_A = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} L_A = 3 - 2 = 1$.

Soluzione esercizio 3. Basta verificare che i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \underline{v}_2 = (0, 1, 1), \quad \underline{v}_3(0, 1, -1)$$

sono una base di $\mathbb{R}^3$ perché allora possiamo applicare la Proposizione 5.2 del libro di Abate-de Fabritiis. Si verifica con il solito metodo già visto varie volte che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Sono quindi una base in $\mathbb{R}^3$.

Per determinare $F(1,0,0)$, $F(0,1,0)$, $F(0,0,1)$ dobbiamo espimere i vettori $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$ in funzione di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ e poi applicare la linearità. Si ha $(1,0,0) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$, $(0,1,0) = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$, $(0,0,1) = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 - \underline{v}_3)$ e quindi

$$F(1,0,0) = F(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = F(\underline{v}_1) - F(\underline{v}_2) = (2,3,2) - (1,3,2) = (1,0,0)$$

$$F(0,1,0) = F(\frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3)) = \frac{1}{2}((1,3,2) + (1,1,-2)) = (1,2,0)$$

$$F(0,0,1) = F(\frac{1}{2}(\underline{v}_2 \underline{v}_3)) = \frac{1}{2}((1,3,2) - (1,1,-2)) = (0,1,2)$$

A questo punto possiamo scrivere anche l'espressione di F su una tripla $\underline{x}$.

$$F\underline{x} = F(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3) = x_1F(\underline{e}_1) + x_2F(\underline{e}_2) + x_3F(\underline{e}_3)$$
$$= x_1(1,0,0) + x_2(1,2,0) + x_3(0,1,2) = (x_1 + x_2, 2x_2 + x_3, 2x_3).$$

Soluzione esercizio 4. Per ipotesi $n = \dim V$ e $m = \dim W$.
La **4.1** è vera, infatti, per il teorema della dimensione $\dim \operatorname{Ker} T = n - \dim \operatorname{Im} T$. Dato che $\operatorname{Im} T \subset W$, si ha $\dim \operatorname{Im} T \leq m$; per ipotesi $n - m > 0$, e quindi $n - \dim \operatorname{Im} T > 0$. Conclusione: $\dim \operatorname{Ker} T > 0$ e T non può essere iniettiva. La **4.2** è anche vera, infatti, sempre per il teorema della dimensione $\dim \operatorname{Im} T = n - \dim \operatorname{Ker} T$. Dato che $\dim \operatorname{Ker} T \geq 0$ si ha che $\dim \operatorname{Im} T \leq n$ ed essendo per ipotesi $n < m$ ne segue che $\dim \operatorname{Im} T < m$ e quindi T non può essere suriettiva.

Soluzione esercizio 5. Se $\underline{w} \in W_2$, allora la sua unica decomposizione secondo $V = W_1 \oplus W_2$ è $\underline{w} = \underline{0} + \underline{w}$ e quindi $P_1\underline{w} = \underline{0}$. Ne segue che $W_2 \subset \operatorname{Ker} P_1$. D'altra parte se $P_1\underline{w} = \underline{0}$ allora, per definizione, $\underline{w} = \underline{0} + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_2 \in W_2$ e necessariamente allora $\underline{w} = \underline{w}_2$ e quindi $\underline{w} \in W_2$ e quindi $\operatorname{Ker} P_1 \subset W_2$. Conclusione: $\operatorname{Ker} P_1 = W_2$. Notiamo che per il teorema della dimensione si ha che $\dim \operatorname{Im} P_1$ è uguale a $\dim V - \dim \operatorname{Ker} P_1 = \dim V - \dim W_2$ per quanto appena visto. Quindi dalla formula di Grassmann applicata a $V = W_1 \oplus W_2$ abbiamo che $\dim \operatorname{Im} P_1 = \dim W_1$. D'altra parte $\operatorname{Im} P_1 \subset W_1$ per definizione. Ne segue che $\operatorname{Im} P_1 = W_1$.
Conclusione: per P_1, la proiezione su W_1 parallelamente a W_2 si ha

$$\operatorname{Ker} P_1 = W_2\,, \qquad \operatorname{Im} P_1 = W_1\,.$$

Analogamente per P_2, la proiezione su W_2 parallelamente a W_1 si ha

$$\operatorname{Ker} P_2 = W_1\,, \qquad \operatorname{Im} P_2 = W_2\,.$$

Soluzione esercizio 6. Vogliamo dimostrare che

$$S_1(\underline{w} + \underline{w}') = S_1(\underline{w}) + S_1(\underline{w}') \quad \text{e} \quad S_1(\lambda\underline{w}) = \lambda S_1(\underline{w}).$$

Vediamo ad esempio la prima relazione: esistono unici $\underline{w}_1 \in W_1$, $\underline{w}_2 \in W_2$ tali che $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ e si ha, per definizione, $S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 - \underline{w}_2$; analogamente esistono unici $\underline{w}'_1 \in W_1$, $\underline{w}'_2 \in W_2$ tali che $\underline{w}' = \underline{w}'_1 + \underline{w}'_2$ e si ha, per definizione, $S_1(\underline{w}') = \underline{w}'_1 - \underline{w}'_2$. Ne segue che

$$\underline{w} + \underline{w}' = (\underline{w}_1 + \underline{w}_2) + (\underline{w}'_1 + \underline{w}'_2) \equiv (\underline{w}_1 + \underline{w}'_1) + (\underline{w}_2 + \underline{w}'_2)$$

con il primo addendo dell'ultima espressione in W_1 ed il secondo addendo in W_2. Ne segue, per definizione, che

$$S_1(\underline{w} + \underline{w}') = (\underline{w}_1 + \underline{w}'_1) - (\underline{w}_2 + \underline{w}'_2) = (\underline{w}_1 - \underline{w}_2) + (\underline{w}'_1 - \underline{w}'_2)$$

Ma a destra riconosciamo $S_1(\underline{w}) + S_1(\underline{w}')$ e quindi

$$S_1(\underline{w} + \underline{w}') = S_1(\underline{w}) + S_1(\underline{w}')$$

come richiesto. La linearità di S_2 è del tutto analoga.
Sia $\underline{w} \in V$, con decomposizione $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$, allora

$$\mathrm{Id}(\underline{w}) - 2P_2(\underline{w}) = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 - 2\underline{w}_2 = \underline{w}_1 - \underline{w}_2 = S_1(\underline{w}),$$

dunque $S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2$. Similmente

$$2P_2(\underline{w}) - \mathrm{Id}(\underline{w}) = 2\underline{w}_2 - (\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = \underline{w}_2 - \underline{w}_1 = S_2(\underline{w}),$$

da cui $S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id}$.
Sia $\underline{w} \in V$, con decomposizione $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$. Per definizione $S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 - \underline{w}_2$. La decomposizione di tale vettore è data da $S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 + (-\underline{w}_2)$, pertanto

$$(S_1)^2(\underline{w}) = S_1(S_1(\underline{w})) = S_1(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) = \underline{w}_1 - (-\underline{w}_2) = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 = \underline{w} = \mathrm{Id}(\underline{w}).$$

Abbiamo quindi dimostrato che $(S_1)^2 = \mathrm{Id}$. L'identità $(S_2)^2 = \mathrm{Id}$ è analoga.