Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 23/10/20

Esercizio 1. Dimostrare che

$$M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$$

con $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$) il sottospazio delle matrici simmetriche (antisimmetriche).

Esercizio 2. Sia $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri complessi e come campo degli scalari i numeri reali. Calcolare la dimensione di $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 3. Vero o Falso :

- 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti
- 6 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti.
- 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti

Giustificare le risposte.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i sottospazi

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}\,, \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Determinare la dimensione di U e la dimensione di W.
Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Esercizio 5. Consideriamo i sottospazi $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ e $W = \mathrm{Span}((1,1,1))$. Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Esercizio 6. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$.
6.1. Determinando una base di W, verificare che $\dim W = 3$.
6.2. Determinare un supplementare di W (e cioè un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ tale che $W \oplus U = \mathbb{R}^4$; determinare U vuol dire qui dare U tramite una sua base.)
Determinare un secondo supplementare di W, U', distinto da U.
Suggerimento per 6.2: Che dimensione ci aspettiamo per U?

Preambolo all'esercizio 7. Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e se W è un secondo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$, allora $U \cap W$, che sappiamo essere un sottospazio, è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ con $C = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$.

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^4$ sono dati $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, A\underline{x} = \underline{0}\}$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, B\underline{x} = \underline{0}\}$ con $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, $\quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Preambolo all'esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale, siano W_1, W_2 due sottospazi vettoriali di V e sia $V = W_1 \oplus W_2$ una decomposizione di V in somma diretta di W_1 e W_2. Definiamo qui sotto due applicazioni:

$P_{W_1}^{W_2}$, la proiezione su W_1 parallelamente a W_2;

$P_{W_2}^{W_1}$, la proiezione su W_2 parallelamente a W_1.
Per semplificare la notazione poniamo $P_1 := P_{W_1}^{W_2}\,, \quad P_2 := P_{W_2}^{W_1}$
Vediamo la definizione: abbiamo visto in classe che ogni vettore $\underline{w}$ di V si scrive in **maniera unica** come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in W_1$ e $\underline{w}_2 \in W_2$. Definiamo $P_1 : V \to V$

associando a $\underline{w} \in V$ il vettore $\underline{w}_1 \in W_1 \subset V$: quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione. Analogamente: $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$ per definizione. Riassumendo:

$$P_1(\underline{w}) := \underline{w}_1, \quad P_2(\underline{w}) := \underline{w}_2 .$$

Esercizio 8.

8.1. Verificare che $P_1 : V \to V$ e $P_2 : V \to V$sono applicazioni **lineari**.
8.2. Considerate $V = \mathbb{R}^2$, W_1 e W_2 di dimensione 1 e ovviamente distinti. Su un disegno indicate un generico vettore $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^2$, $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$.
8.3. Verificare che, in generale, sussistono le seguenti identità:

$$(P_1)^2 = P_1\,; \quad (P_2)^2 = P_2\,; \quad P_1 + P_2 = \mathrm{Id} \tag{1}$$

dove due applicazioni $T : V \to V$, $T' : V \to V$ (anche non lineari) sono uguali se $T(\underline{v}) = T'(\underline{v})\,,\ \forall \underline{v} \in V$. Nella (1) abbiamo adottato le seguenti notazioni:
per una qualsiasi applicazione lineare $T : V \to V$ abbiamo indicato con T^2 l'applicazione $T \circ T$ e per una coppia di applicazioni (anche non lineari) S e T abbiamo indicato con $S + T$ l'applicazione definita da $(S + T)(\underline{v}) := S(\underline{v}) + T(\underline{v})$. Infine, Id_V è l'applicazione identica, che manda $\underline{v}$ in $\underline{v}$.
8.4. Ritrovate la (1) sul vostro disegno.