Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 23/10/20. SOLUZIONI.

Esercizio 1. Dimostrare che

$$M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$$

con $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$) il sottospazio delle matrici simmetriche (antisimmetriche).

Soluzione. Abbiamo già visto che $M_{33}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{33}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$. In generale possiamo scrivere

$$M_{nn}(\mathbb{R}) \ni A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

Ricordando che $(A^t)^t = A$ vediamo che il primo addendo a destra è una matrice simmetrica, mentre il secondo addendo a destra è una matrice antisimmetrica. Quindi $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$. Rimane quindi da vedere che $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) = \underline{0}$. Ma se $A \in \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ allora $a_{ij} = a_{ji}$ perché $A \in \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$ e $a_{ij} = -a_{ji}$ perché $A \in \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$. Per un numero reale α si ha che $\alpha = -\alpha$ se e solo se $\alpha = 0$. Quindi A è la matrice nulla.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri complessi e come campo degli scalari i numeri reali. Calcolare la dimensione di $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$.

Soluzione. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ ha dimensione 2, infatti una sua base è data da 1 e i.

Esercizio 3. Vero o Falso :

- 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti
- 6 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti.
- 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti

Giustificare le risposte.

Soluzione. La prima affermazione è falsa. Per dimostrarlo dobbiamo mostrare che in $\mathbb{R}^6$ è possibile trovare quattro vettori linearmente indipendenti. Un modo è il seguente.
Sappiamo che $\mathbb{R}^6$ ha dimensione 6. Una sua base $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4, \underline{b}_5, \underline{b}_6\}$ è costituita da 6 vettori linearmente indipendenti tra loro. Ma allora, in particolare i 4 vettori $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ sono linearmente indipendenti. Possiamo scegliere, ad esempio, la base canonica.

La seconda affermazione è vera. Se avessimo in $\mathbb{R}^4$ sei vettori linearmente indipendenti, allora la dimensione di $\mathbb{R}^4$ sarebbe almeno 6, ma sappiamo che la dimensione di $\mathbb{R}^4$ è uguale a 4.

Infine, l'ultima affermazione è falsa. Per fornire un controesempio basta prendere tre vettori a piacere in $\mathbb{R}^6$ e scegliere come quarto vettore una combinazione lineare dei primi tre.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i sottospazi

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}\,, \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Determinare la dimensione di U e la dimensione di W.
Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Soluzione. Il sottospazio U è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^3$ e quindi $\dim U < 3$. I vettori $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$ appartengono ad U e sono linearmente indipendenti perché non proporzionali. Quindi $\dim U \geq 2$. Ne segue che $\dim U = 2$. Analogamente

$\dim W = 2$. L'intersezione di U e di W è costituita dai vettori $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano sia $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ che $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$; $U \cap W$ è quindi uguale al sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Possiamo risolvere esplicitamente il sistema (è un sistema non-quadrato ma non è difficile risolverlo [1]) troviamo che $U \cap W = \mathrm{Span}((1/3, -2/3, 1)) = \mathrm{Span}((1, -2, 3))$.

In particolare $\dim(U \cap W) = 1$. Ne segue, dalla formula di Grassmann, che $U + W$ ha dimensione uguale a $2 + 2 - 1 = 3$. Ma un sottospazio di dimensione 3 di $\mathbb{R}^3$ è necessariamente uguale ad $\mathbb{R}^3$. Quindi $\mathbb{R}^3 = U + W$; tuttavia, $\mathbb{R}^3$ **non** è somma diretta di questi sottospazi perché la lora intersezione non è uguale al vettore nullo.

Esercizio 5. Consideriamo i sottospazi $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ e $W = \mathrm{Span}((1, 1, 1))$. Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Soluzione. Sappiamo che U ha dimensione 2. È ovvio che W ha dimensione 1. Inoltre $W = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Ma allora è subito visto che $U \cap W = \{\underline{0}\}$ (perché (α, α, α) soddisfa l'equazione che definisce U se e solo se $\alpha = 0$). Ne segue che $\dim(U \cap W) = 0$. Ma allora, per Grassmann, $\dim(U + W) = 2 + 1 - 0 = 3$. Ne segue che $U + W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e $\dim(U + W) = 3$; ma allora $U + W = \mathbb{R}^3$. Conclusione: in questo caso $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ perché $U + W = \mathbb{R}^3$ e $U \cap W = \{\underline{0}\}$.

Esercizio 6. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$.
6.1. Determinando una base di W, verificare che $\dim W = 3$.
6.2. Determinare un supplementare di W (e cioè un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ tale che $W \oplus U = \mathbb{R}^4$; determinare U vuol dire qui dare U tramite una sua base.)
Determinare un secondo supplementare di W, U', distinto da U.
Suggerimento per 6.2: Che dimensione ci aspettiamo per U?

Soluzione. Ragionando come nell'esercizio 4 capiamo che $\dim W \leq 3$, perché W è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^4$. È anche chiaro che $\dim W \geq 2$ perché i vettori $(0, 1, 0, 0)$ e $(1, 0 - 1, 0)$ sono linearmente indipendenti (perché non proporzionali) ed appartengono a W. È facile vedere che

$$(0, 1, 0, 0)\,, \quad (1, 0 - 1, 0)\,, \quad (0, 0, 1, -1)$$

sono 3 vettori linearmente indipendenti di W e quindi $\dim W = 3$; infatti se

$$\alpha_1(0, 1, 0, 0) + \alpha_2(1, 0 - 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1, -1) = \underline{0}$$

allora

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

da cui, ovviamente, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Quindi W ha dimensione 3. Sia $\underline{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^4$ non appartenente a W; basta prendere un vettore che non soddisfa l'equazione che definisce W, ad esempio $\underline{u} = (1, 1, 1, 1)$. Allora $\mathrm{Span}(\underline{u}) = \{(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1 ed è subito visto che ha intersezione banale con W: $U \cap W = \{\underline{0}\}$.

[1] ad esempio, possiamo portare x_3 a destra delle due uguaglianze e considerarlo come un parametro, ponendo quindi $x_3 = s$. Poi risolviamo con Gauss il sistema in x_1, x_2 con termine noto dato da $(s, -s)^t$ dove t significa qui "trasposto"

Per Grassmann $\dim(U+W) = 3+1-0 = 4$; ma allora $U+W = \mathbb{R}^4$. Conclusione $\mathbb{R}^4 = W \oplus U$. Se scegliamo $U' = \text{Span}(\underline{u}')$ con $\underline{u}' \notin W$ e $\underline{u}' \neq \underline{u}$ allora $\mathbb{R}^4 = W \oplus U'$ ma $U \neq U'$. Ad esempio: $\underline{u}' = (3,2,2,1)$.

Preambolo all'esercizio 7. Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e se W è un secondo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$, allora $U \cap W$, che sappiamo essere un sottospazio, è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ con $C = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$.

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^4$ sono dati $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\underline{x} = \underline{0}\}$ con $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Soluzione esercizio 7. L'intersezione dei due sottospazi è data dai vettori $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^4$ tali che $C\underline{x} = \underline{0}$, con C uguale alla matrice 4×4 ottenuta considerando $\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$. Applicando Gauss vediamo che C è non-singolare e quindi l'unica soluzione del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ è la soluzione banale $\underline{0}$. Ne segue che $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Per Grassmann

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W.$$

Ma $\dim U \geq 2$ perché

$$U = \{\underline{x} \mid \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_4 = 0 \end{array} \right. \}$$

e i vettori

$$(1,0,2,0)\,, \quad (0,1,-1,\frac{1}{4})$$

appartengono a U e sono non-proporzionali. Analogamente $\dim W \geq 2$. Ne segue che deve essere $\dim(U+W) = 4$ (non può certo essere maggiore di 4 dato che siamo in $\mathbb{R}^4$) da cui $U+W = \mathbb{R}^4$. Ne segue che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$

Preambolo all'esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale, siano W_1, W_2 due sottospazi vettoriali di V e sia $V = W_1 \oplus W_2$ una decomposizione di V in somma diretta di W_1 e W_2. Definiamo qui sotto due applicazioni:
$P^{W_2}_{W_1}$, la proiezione su W_1 parallelamente a W_2;
$P^{W_1}_{W_2}$, la proiezione su W_2 parallelamente a W_1.
Per semplificare la notazione poniamo $P_1 := P^{W_2}_{W_1}\,, \quad P_2 := P^{W_1}_{W_2}$
Vediamo la definizione: abbiamo visto in classe che ogni vettore $\underline{w}$ di V si scrive in **maniera unica** come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in W_1$ e $\underline{w}_2 \in W_2$. Definiamo $P_1 : V \to V$ associando a $\underline{w} \in V$ il vettore $\underline{w}_1 \in W_1 \subset V$: quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione. Analogamente: $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$ per definizione. Riassumendo:

$$P_1(\underline{w}) := \underline{w}_1, \quad P_2(\underline{w}) := \underline{w}_2\,.$$

Esercizio 8.
8.1. Verificare che $P_1 : V \to V$ e $P_2 : V \to V$sono applicazioni **lineari**.
8.2. Considerate $V = \mathbb{R}^2$, W_1 e W_2 di dimensione 1 e ovviamente distinti. Su un disegno indicate un generico vettore $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^2$, $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$.
8.3. Verificare che, in generale, sussistono le seguenti identità:

$$(P_1)^2 = P_1\,; \quad (P_2)^2 = P_2\,; \quad P_1 + P_2 = \text{Id} \tag{2}$$

dove due applicazioni $T : V \to V$, $T' : V \to V$ (anche non lineari) sono uguali se $T(\underline{v}) = T'(\underline{v})$, $\forall \underline{v} \in V$. Nella (2) abbiamo adottato le seguenti notazioni:
per una qualsiasi applicazione lineare $T : V \to V$ abbiamo indicato con T^2 l'applicazione $T \circ T$ e per una coppia di applicazioni (anche non lineari) S e T abbiamo indicato con $S + T$ l'applicazione definita da $(S + T)(\underline{v}) := S(\underline{v}) + T(\underline{v})$. Infine, Id_V è l'applicazione identica, che manda $\underline{v}$ in $\underline{v}$.
8.4. Ritrovate la (2) sul vostro disegno.

Soluzione.
8.1. Vogliamo dimostrare che $P_1(\underline{w}+\underline{w}') = P_1(\underline{w})+P_1(\underline{w}')$ e che $P_1(\lambda\underline{w}) = \lambda P_1(\underline{w})$. Vediamo ad esempio la prima relazione: esistono unici $\underline{w}_1 \in W_1$, $\underline{w}_2 \in W_2$ tali che $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ e si ha, per definizione, $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$; analogamente esistono unici $\underline{w}'_1 \in W_1$, $\underline{w}'_2 \in W_2$ tali che $\underline{w}' = \underline{w}'_1 + \underline{w}'_2$ e si ha, per definizione, $P_1(\underline{w}') = \underline{w}'_1$. Ne segue che

$$\underline{w} + \underline{w}' = (\underline{w}_1 + \underline{w}_2) + (\underline{w}'_1 + \underline{w}'_2) \equiv (\underline{w}_1 + \underline{w}'_1) + (\underline{w}_2 + \underline{w}'_2)$$

con il primo addendo dell'ultima espressione in W_1 ed il secondo addendo in W_2. Ne segue, per definizione, che $P_1(\underline{w} + \underline{w}') = (\underline{w}_1 + \underline{w}'_1)$. Ma a destra riconosciamo $P_1(\underline{w}) + P_1(\underline{w}')$ e quindi

$$P_1(\underline{w} + \underline{w}') = P_1(\underline{w}) + P_1(\underline{w}')$$

come richiesto.
8.3. Sia $\underline{w} \in V$, con decomposizione $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$. Calcoliamo $(P_1)^2(\underline{w})$:

$$(P_1)^2(\underline{w}) = P_1(P_1(\underline{w})) = P_1(P_1(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)) = P_1(\underline{w}_1) = \underline{w}_1 = P_1(\underline{w}),$$

dove nella terza uguaglianza abbiamo utilizzato la definizione di P_1 e nella quarta uguaglianza abbiamo ragionato come segue:
$\underline{w}_1 \in W_1$, la sua unica decomposizione è quindi data da $\underline{w}_1 = \underline{w}_1 + \underline{0}$ e dunque $P_1(\underline{w}_1) = \underline{w}_1$.
La seconda identità è analoga:

$$(P_2)^2(\underline{w}) = P_2(P_2(\underline{w})) = P_2(P_2(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)) = P_2(\underline{w}_2) = \underline{w}_2 = P_2(\underline{w}).$$

Dimostriamo infine che $P_1 + P_2 = \mathrm{Id}$. Sia $\underline{w} \in V$ di decomposizione $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$. Abbiamo:

$$(P_1+P_2)(\underline{w}) := P_1(\underline{w})+P_2(\underline{w}) = P_1(\underline{w}_1+\underline{w}_2)+P_2(\underline{w}_1+\underline{w}_2) = \underline{w}_1+\underline{w}_2 = \underline{w} = \mathrm{Id}(\underline{w}),$$

Quindi $(P_1 + P_2)(\underline{w}) = \mathrm{Id}(\underline{w})$ $\forall \underline{w} \in V$ e l'identità è dimostrata.

Soluzione di alcuni esercizi alla luce del Teorema della dimensione.

Soluzione esercizio 4. Sappiamo che se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ allora $n = \dim \mathrm{Ker}A + \mathrm{rg}A$, dove il nucleo di A,

$$\mathrm{Ker}A \equiv \mathrm{Ker}L_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid L_A\underline{x} = \underline{0}\},$$

altri non è che *il sottospazio* di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare *omogeneo* $A\underline{x} = \underline{0}$. Questo vuol dire che $\dim \mathrm{Ker}A = n - \mathrm{rgA}$. In parole, *la dimensione del sottospazio di* $\mathbb{R}^n$ *costituito dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo* $A\underline{x} = \underline{0}$ *è data dal numero delle incognite meno il rango della matrice dei coefficienti del sistema.* Vi ricordo (libro di testo, Def 5.3 + Es 5.12) che il rango di A è il rango di L_A, e cioè, per definizione, la dimensione dell'immagine di L_A.
Nel nostro caso U è l'insieme delle soluzioni di un sistema di **1** equazione in **3**

incognite: $U = \mathrm{Ker} A$ con $A = |1 \ -1 \ -1| \in M_{13}(\mathbb{R})$. Ma allora $\dim U = 3 - \mathrm{rg} A$. Ma rgA = 1: infatti, in generale, $\mathrm{rg} A$ è la dimensione di $\mathrm{Im}\, L_A$; ora, l'immagine di L_A è costituita dallo span delle colonne di A perché la j-ma colonna di A è proprio $L(\underline{e}_j)$ e sappiamo che $\mathrm{Im}\, L_A$ è uguale allo span dei $L_A(\underline{e}_j)$ (Lemma 5.6 + Esempio 5.12). Quindi, nel nostro caso $\mathrm{rg} A \leq 3$, il numero di colonne; d'altra parte $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, quindi $\mathrm{Im} L_A \leq \mathbb{R}$ e sappiamo che in $\mathbb{R}$ c' è al più 1 vettore linearmente indipendente; dato che la prima colonna è linearmente indipendente perché non-nulla concludiamo che $\dim \mathrm{Im} L_A = \mathrm{rg} A = 1$.
In alternativa: rango per colonne è uguale a rango per righe e qui c'è una sola riga non-nulla, quindi $\mathrm{rg} A = 1$.

Quindi, tornando all'esercizio, si ha $\dim U = 3 - 1 = 2$. Conclusione: $\dim U = 2$. Analogamente $\dim W = 2$. Ma allora, per Grassmann,

$$\dim(U \cap W) = 2 + 2 - \dim(U + W) = 4 - \dim(U + W)\,.$$

Ora, $U + W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ed ha quindi dimensione ≤ 3. Ma allora $\dim(U \cap W) \geq 1$. In ogni caso $(U \cap W) \neq \underline{0}$ e $\mathbb{R}^3$ non è somma diretta.

Osservazione. Ovviamente avremmo potuto considerare l'intersezione di U e di W che è costituita dai vettori $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano sia $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ che $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$; $U \cap W$ è quindi uguale al sottospazio delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Anche in questo caso, per capire l'insieme delle soluzioni di questo sistema omogeneo, possiamo utilizzare il teorema della dimensione. Più precisamente: sapendo che $U \cap W$ è dato dalle soluzioni di (3), avremmo potuto subito concludere che $\dim(U \cap W) = 1$. Vediamo i dettagli:
sappiamo dal teorema della dimensione che

$$\dim(U \cap W) = 3 - \mathrm{rg} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ma la matrice A in questa formula ha rango 2. Vediamolo: $\mathrm{rg} A$ è la dimensione di $\mathrm{Im}\, L_A$; l'immagine di L_A è costituita dallo span delle colonne di A (perché, di nuovo, la j-ma colonna di A è proprio $L(\underline{e}_j)$ e sappiamo che $\mathrm{Im}\, L_A$ è uguale allo span dei $L_A(\underline{e}_j)$ (Lemma 5.6 + Esempio 5.12)). Quindi, nel nostro caso $\mathrm{rg} A \leq 3$; d'altra parte $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e quindi $\dim \mathrm{Im}(A) = \mathrm{rg} A \leq 2$; dato che le prime due colonne sono linearmente indipendenti perché non-proporzionali concludiamo che $\mathrm{rg} A = 2$. In alternativa possiamo calcolare il rango per righe; qui ci sono due righe non proprorzionali quindi $\mathrm{rg} A = 2$. Conclusione: $\dim(U \cap W) = 3 - 2 = 1$.

Soluzione esercizio 7. Innanzitutto osserviamo che rgA = rgB = 2. Infatti il rango di A (ad esempio) è la dimensione di $\mathrm{Im}\, L_A$ che è lo span delle colonne di A. Ora, le colonne di A sono in $\mathbb{R}^2$ e sappiamo che in $\mathbb{R}^2$ ci sono al più due vettori linearmente indipendenti; quindi rgA ≤ 2; dato che le prime due colonne di A sono non-proporzionali concludiamo che rgA = 2. Analogamente rgB = 2. Quindi, per il teorema della dimensione, $\dim U = \dim W = 4 - 2 = 2$. L'intersezione ha dimensione $4 - \mathrm{rg} C$ con C uguale alla matrice 4×4 ottenuta considerando $\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$. Applicando Gauss vediamo che C è non-singolare e quindi $\mathrm{rg} C = 4$. Ne segue che $U \cap W = \{\underline{0}\}$; per Grassmann $\dim(U + W) = 4$. Ovviamente potevamo anche procedere direttamente e verificare, come nella soluzione dell'esercizio data precedentemente, che $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Ne segue, come prima, che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$