Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 16/10/20

Esercizio 1. Stabilire se l'insieme $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')\,,\qquad k(x,y)=(kx,-ky)\,,\quad \forall k\in\mathbb{R}.$$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a tre. Si consideri il sottoinsieme

$$W=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x]\mid p(1)=0\}$$

Stabilire se W è un sottospazio. Stesso esercizio per

$$U=\{q(x)\in\mathbb{R}_3[x]\mid q(2)=4\}.$$

Esercizio 3. Sia $V=\mathbb{R}[x]$ e sia $p(x)=1+x+x^2+5x^4$. Consideriamo $q(x)=x^2+5x^4$. Stabilire se $q(x)\in\mathrm{Span}(p)$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale e $\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k\}$ vettori linearmente indipendenti. Verificare che se $c_1,\dots,c_k\in\mathbb{R}$, $c_j\neq 0\ \forall j$, allora i vettori

$$c_1\underline{v}_1,\dots,c_k\underline{v}_k$$

sono anche linearmente indipendenti.

Esercizio 5. Una matrice $A=(a_{ij})\in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij}=a_{ji}$ per ogni i,j. Una matrice A è detta *antisimmetrica* se $a_{ij}=-a_{ji}$ per ogni i,j.

5.1. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})\subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio.

5.2. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})\subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è un sottospazio.

5.3. Facoltativo. Nel caso $n=3$ determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$.

Esercizio 6. Sia $V=\mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1=\begin{vmatrix}1\\2\\2\end{vmatrix}\,,\ \underline{v}_2=\begin{vmatrix}3\\1\\-1\end{vmatrix}\,,\ \underline{v}_3=\begin{vmatrix}-1\\-1\\0\end{vmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2=(0,1,0)$ in questa nuova base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 7. Sia $V=\mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1=(1,0,1,0)\,,\ \underline{v}_2=(0,1,0,0)\,,\ \underline{v}_3=(0,0,1,0).$$

Verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.
Determinare una base per i seguenti sottospazi:

$W_1=\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3,\underline{v}_1+\underline{v}_2,\underline{v}_1+74\underline{v}_2-\sqrt{2}\underline{v}_3)$
$W_2=\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_2)$
$W_3=\mathrm{Span}(\underline{v}_1+\underline{v}_2,\underline{v}_1-\underline{v}_2,\underline{v}_1+2\underline{v}_2,\underline{v}_1-2\underline{v}_2)$