Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 16/10/20. Soluzioni.

Esercizio 1. Stabilire se l'insieme $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \qquad k(x, y) = (kx, -ky), \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Soluzione. Le operazioni $\{+, \cdot\}$ definite nel testo dell'esercizio non dotano $\mathbb{R}^2$ di una struttura di spazio vettoriale. Forse il modo più semplice di vederlo (ce ne sono ovviamente altri) è osservare che $1 \cdot (x, y) = (x, -y)$ e dunque, in generale

$$1 \cdot (x, y) \neq (x, y)$$

Non è dunque verificato l'assioma $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$, $\forall \underline{v} \in V$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a tre. Si consideri il sottoinsieme

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0\}$$

Stabilire se W è un sottospazio. Stesso esercizio per

$$U = \{q(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid q(2) = 4\}.$$

Soluzione. Il sottoinsieme W è un sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$. Infatti, presi $p(x), q(x)$ in W e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$(p + q)(1) = p(1) + q(1) = 0$$
$$(\lambda p)(1) = \lambda \cdot p(1) = 0$$

dunque $p(x) + q(x) \in W$ e $\lambda p(x) \in W$. Il sottoinsieme U, invece, non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$. Ad esempio il polinomio zero non appartiane ad U.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ e sia $p(x) = 1 + x + x^2 + 5x^4$. Consideriamo $q(x) = x^2 + 5x^4$. Stabilire se $q(x) \in \mathrm{Span}(p)$.

Soluzione. Il polinomio $q(x)$ non appartiene a $\mathrm{Span}(p)$. Infatti se $q \in \mathrm{Span}(p)$, si avrebbe $q(x) = \lambda p(x)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, ovvero

$$x^2 + 5x^4 = \lambda(1 + x + x^2 + 5x^4)$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Ma l'uguaglianza scritta sopra è equivalente a

$$\lambda + \lambda x + (\lambda - 1)x^2 + 5(\lambda - 1)x^4 = \underline{0}$$

dove a destra c'è il **polinomio nullo**, ovvero al sistema

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \\ \lambda - 1 = 0 \\ 5\lambda - 5 = 0 \end{cases}$$

che evidentemente non ha alcuna soluzione.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale e $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ vettori linearmente indipendenti. Verificare che se $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, $c_j \neq 0\ \forall j$, allora i vettori

$$c_1\underline{v}_1, \ldots, c_k\underline{v}_k$$

sono anche linearmente indipendenti.

Soluzione. Sia
$$\alpha_1(c_1\underline{v}_1) + \alpha_2(c_2\underline{v}_2) + \cdots + \alpha_k(c_k\underline{v}_k) = \underline{0}$$
Ne segue, dagli assiomi, che
$$(\alpha_1 c_1)\underline{v}_1 + (\alpha_2 c_2)\underline{v}_2 + \cdots + (\alpha_k c_k)\underline{v}_k = \underline{0}$$
Per ipotesi i vettori sono linearmente indipendenti; ne segue che
$$\alpha_j c_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, k\,.$$
Ma $c_j \neq 0\ \forall j$ e quindi deve essere $\alpha_j = 0\ \forall j$. Ne segue la tesi.

Esercizio 5. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j. Una matrice A è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j.
5.1. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio.
5.2. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è un sottospazio.
5.3 Nel caso $n = 3$ determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$.

Soluzione. Siano A e B due matrici simmetriche e λ un numero reale. Dobbiamo mostrare che anche $A + B$ e λA sono matrici antisimmetriche. Ricordiamo che se A è una matrice allora $(A)_{ij}$ è il coefficiente della matrice che si trova sulla i-ma riga e la j-ma colonna.
Si ha
$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = (A + B)_{ji}$$
$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} = \lambda \cdot a_{ji} = (\lambda A)_{ji}$$
dunque $A + B, \lambda A \in \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$.

La dimostrazione per lo spazio delle matrici antisimmetriche è perfettamente analoga: se A e B sono due matrici anti simmetriche e λ un numero reale, allora
$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = -a_{ji} - b_{ji} = -(A + B)_{ji}$$
$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} = -\lambda \cdot a_{ji} = -(\lambda A)_{ji}$$
dunque $A + B, \lambda A \in \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$.

Una base di $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ è data dalle 6 matrici
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
Una base di di $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ è invece data dalle 3 matrici
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ in questa nuova base di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. Si tratta di 3 vettori in $\mathbb{R}^3$. Per mostrare che sono una base occorre mostrare che sono linearmente indipendenti e che sono un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$. Risolviamo entrambi i problemi studiando opportuni sistemi di equazioni lineari.

L'equazione

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 = 0$$

è equivalemte al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Osserviamo che avremmo potuto scrivere la matrice del sistema direttamente dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$. Applichiamo l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice del sistema:

$$A := \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 \end{array}\right|$$

Tutti i pivot sono diversi da zero. la matrice del sistema è pertanto non singolare, ed il sistema ammette un' unica soluzione. Trattandosi di un sistema omogeneo, quest'unica soluzione deve essere la soluzione banale.

Ne segue che i vettori sono linearmente indipendenti.

Dato che abbiamo verificato che la matrice A è non singolare, possiamo concludere che $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ il sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = b_1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = b_2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = b_3 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione. Questo dimostra che ogni vettore $\underline{b}$ di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare dei 3 vettori dati che sono quindi un sistema di generatori.

Conclusione: i tre vettori $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Osservazione. Con quello che abbiamo poi imparato sul concetto di dimensione bastava ovviamente dimostrare che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ erano linearmente indipendenti, ma questo esercizio è stato assegnato *prima* di parlare del Teorema del completamento e delle sue conseguenze.

Passiamo alla seconda parte dell'esercizio, caso particolare ma esplicito del fatto che

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = b_1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = b_2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = b_3 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione per ogni fissato $\underline{b}$ di $\mathbb{R}^3$.
Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2\underline{v}_3$ significa determinare i tre numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per i quali risulta

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = \underline{e}_2$$

Arriviamo così al sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Osserviamo che anche in questo caso avremmo potuto scrivere la matrice del sistema direttamente dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ ed $\underline{e}_2$. Applicando l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice del sistema troviamo:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & -7/5 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right|$$

Le coordinate di $\underline{e}_2$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2\underline{v}_3$ sono pertanto $(-1/3, -2/3, -7/3)$; vale a dire

$$\underline{e}_2 = -\frac{1}{3}\underline{v}_1 - \frac{2}{3}\underline{v}_2 - \frac{7}{3}\underline{v}_3$$

Esercizio 7. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,1,0)\,,\ \underline{v}_2 = (0,1,0,0)\,,\ \underline{v}_3 = (0,0,1,0).$$

Verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.
Determinare una base per i seguenti sottospazi:
$W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 74\underline{v}_2 - \sqrt{2}\underline{v}_3)$
$W_2 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$
$W_3 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2, \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2)$

Soluzione. Ricordiamo una utile notazione: se un sottoinsieme $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V, scriviamo $W \leq V$.

Verifichiamo che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti: l'equazione $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = 0$ scritta per esteso è

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

ed ha evidentemente la sola soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$. Determiniamo ora una base per i sottospazi W_1, W_2 e W_3. Osserviamo che tutti i generatori di W_1 sono combinazioni lineari di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, dunque $W_1 \leq \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$. D'altronde i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ appartengono a W_1 e dunque $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) \leq W_1$. Ne segue $W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$. Poiché i tre vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti, essi sono una base per il sottospazio che generano, e dunque una base di W_1 è $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Con ragionamento perfettamente analogo si prova che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di W_2. Infine, per quanto riguarda W_3 osserviamo che tutti i generatori di W_3 sono combinazioni lineari di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ e dunque $W_3 \leq \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. D'altra parte

$$\begin{aligned}
\underline{v}_1 &= \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) \\
\underline{v}_2 &= \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) - \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)
\end{aligned}$$

e quindi $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \leq W_3$. Ne segue che $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = W_3$ e quindi una base di W_3 è costituita da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$.