Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 09/10/20

Esercizio 0. Utilizzando il metodo di Gauss, discutere il seguente sistema lineare quadrato:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \\ 3x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 1. Abbiamo visto in classe che ogni sistema lineare quadrato è equivalente ad un sistema triangolare superiore.
Rileggere e capire la dimostrazione.
Dare la definizione di sistema lineare triangolare *inferiore*. Dimostrare che ogni sistema quadrato è equivalente ad un sistema triangolare inferiore. [1]

Esercizio 2. Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare quadrato, con A matrice $n \times n$. Supponiamo che A sia *non singolare* e cioè che i suoi *pivots* siano tutti non nulli. Verificare che il sistema $A\,\underline{x} = \underline{b}$ è equivalente ad un sistema diagonale $\mathrm{Id}_n\,\underline{x} = \underline{c}$ con Id_n la matrice identità:

$$\mathrm{Id}_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

e dunque al sistema banale $\underline{x} = \underline{c}$ (che ha soluzione, ovviamente, $\underline{\nu} = \underline{c}$).
Suggerimento: ridurre ad un sistema triangolare superiore e poi fare uso dell'esercizio 1.

Esercizio 3. Applicare il procedimento messo a punto nell'esercizio 2 al sistema dell'esercizio 0:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \\ 3x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 4. Utilizzando il metodo di Gauss, studiare il sistema di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} y - z = -1 \\ x + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

[1] *Suggerimento:* utilizzare una riduzione di Gauss "a salire", partendo dall'ultima colonna.