Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 09/10/20.
Soluzioni di alcuni esercizi.

Osservazione preliminare. Il metodo di eliminazione di Gauss si basa su quello che abbiamo chiamato *Lemma fondamentale* (è il Lemma 3.2 del libro di testo). Il Lemma fondamentale riguarda un sistema di equazioni lineari; esso permette di sostituire alla j-ma equazione la j-ma equazione moltiplicata per $k \neq 0$ più un'altra equazione moltiplicata per un arbitrario fattore $\ell \in \mathbb{R}$ e ottenere un sistema equivalente al sistema dato. Nel metodo di eliminazione di Gauss consideriamo sempre $k = 1$ ma è chiaro che potremmo semplificarci qualche conto considerando k arbitrario purché diverso da zero. Faccio notare sin da adesso che il metodo di Gauss con $k = 1$ permette di mantenere invariate altre proprietà importanti della matrice associata al sistema (ad esempio, nel caso quadrato, il valore assoluto del determinante). Per la riduzione di un sistema quadrato ad un sistema triangolare superiore possiamo invece utilizzare qualsiasi $k \neq 0$.
D'ora in avanti parliamo di *Metodo di Gauss per matrici*, o brevemente *Metodo di Gauss*, se consideriamo sostituzioni con $k = 1$; utilizzeremo la dizione *Metodo di Gauss per sistemi* se ci diamo la libertà di fare sostituzioni con $k \neq 0$.

Soluzione esercizio 0 e soluzione esercizio 3 .
La matrice associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

L'elemento di posto $(1, 1)$ è diverso da zero; in particolare è uguale ad 1. Possiamo utilizzare questo 1 per eliminare gli altri della prima colonna al di sotto della prima riga; questo è il primo passo del metodo di Gauss. Eseguiamo cioè la seguente operazione sulle righe:

$$\begin{gathered} \text{prima riga} \to \text{prima riga} \\ \text{seconda riga} \to \text{seconda riga} - 2 \cdot \text{prima riga} \\ \text{terza riga} \to \text{terza riga} - 3 \cdot \text{prima riga} \end{gathered}$$

Otteniamo così la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

L'elemento di posto $(2, 2)$ è diverso da zero. Applichiamo il *Metodo di Gauss per sistemi.* Possiamo rendere l''elemento di posto $(2, 2)$ uguale ad 1 moltiplicando la seconda riga per $-1/3$ [1], ottenendo così la matrice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

[1] Questa operazione è contemplata dal metodo di Gauss per sistemi ma non dal Metodo di Gauss

Adesso utilizziamo l' uno nel posto $(2,2)$ per eliminare gli elementi della seconda colonna al di sotto della seconda riga:

$$\begin{aligned} \text{prima riga} &\to \text{prima riga} \\ \text{seconda riga} &\to \text{seconda riga} \\ \text{terza riga} &\to \text{terza riga} - (-9)\cdot \text{seconda riga} \end{aligned}$$

Otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

L'elemento di posto $(3,3)$ è diverso da zero e lo possiamo rendere uguale ad uno moltiplicando la terza riga per $-1/2$. La matrice che si ottiene è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A questo punto l'eliminazione "a scendere" è completata. I pivot sono tutti non nulli, e dunque possiamo già concludere che il sistema ammette un unica soluzione. Per determinarla esplicitamente facciamo l'eliminazione "a salire": utilizziamo l'uno in posizione (3,3) per eliminare gli elementi della terza colonna al di sopra della terza riga:

$$\begin{aligned} \text{prima riga} &\to \text{prima riga} - 3\cdot \text{terza riga} \\ \text{seconda riga} &\to \text{seconda riga} - 2/3\cdot \text{terza riga} \\ \text{terza riga} &\to \text{terza riga} \end{aligned}$$

ottenendo così la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Adesso utilizziamo l'uno in posizione $(2,2)$ per eliminare gli elementi della seconda colonna al di sopra della seconda riga:

$$\begin{aligned} \text{prima riga} &\to \text{prima riga} - 2\cdot \text{seconda riga} \\ \text{seconda riga} &\to \text{seconda riga} \\ \text{terza riga} &\to \text{terza riga} \end{aligned}$$

La matrice che otteniamo è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Abbiamo finito: quest'ultima matrice ritradotta in un sistema ci dice

$$\begin{cases} x = -2/3 \\ y = -2/3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 4.
La matrice del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Scambiando la seconda riga con la prima ed operando con Gauss otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e possiamo quindi concludere che il sistema è incompatibile (l'ultima equazione dà $0z = 1$ che non è mai soddisfatta).