Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Soluzioni per gli ulteriori esercizi del 9/10/2020

Soluzione esercizio 1. Vediamo che f_g è suriettiva. Sia e l'elemento neutro di G. Sia $\gamma \in G$. Dobbiamo verificare che esiste $\eta \in G$ tale che $f_g(\eta) = \gamma$. Ma $f_g(\eta) := \eta \bullet g$. Quindi cerchiamo η tale che $\eta \bullet g = \gamma$. Dobbiamo usare l'ipotesi e cioè che $(G, \bullet)$ è un gruppo: esiste quindi g^{-1} e se consideriamo $\eta = \gamma \bullet g^{-1}$ allora abbiamo, per l'associatività,

$$\eta \bullet g = (\gamma \bullet g^{-1}) \bullet g = \gamma \bullet (g^{-1} \bullet g) = \gamma \bullet e = \gamma$$

ed abbiamo finito. Vediamo ora che l'applicazione f_g è iniettiva. Infatti se $f_g(h) = f_g(h')$ allora $h \bullet g = h' \bullet g$; quindi moltiplicando ambo i membri per l'inverso di g, che denotiamo g^{-1}, otteniamo

$$(h \bullet g) \bullet g^{-1} = (h' \bullet g) \bullet g^{-1}$$

Utilizzando l'associatività e la definizione di inverso otteniamo $h = h'$ e quindi f_g è iniettiva.
Ne segue che f_g è bigettiva. La sua inversa è l'applicazione $f_{g^{-1}}$ che associa a h l'elemento $h \bullet g^{-1}$.

Soluzione esercizio 2. Denotiamo con $\bullet$ l'operazione in G. Supponiamo che g_0 e g_0' siano due elementi neutri. Vogliamo dimostrare che $g_0 = g_0'$. Ma $g_0 \bullet g = g = g \bullet g_0$ $\forall g \in G$. In particolare $g_0 \bullet g_0' = g_0'$. D'altra parte anche g_0' è un elemento neutro e quindi, ragionando come sopra, abbiamo che $g_0' \bullet g_0 = g_0 = g_0 \bullet g_0'$. In definitiva:

$$g_0 = g_0 \bullet g_0' = g_0'$$

e abbiamo finito.
Sia ora g un elemento di G e siano g' e $\tilde{g}'$ due elementi inversi di g. Vogliamo dimostrare che sono uguali. Sia e l'elemento neutro di G. Si ha

$$g' = g' \bullet e = g' \bullet (g \bullet \tilde{g}') = (g' \bullet g) \bullet \tilde{g}' = e \bullet \tilde{g}' = \tilde{g}'$$

e abbiamo finito.

Soluzione esercizio 3. Dobbiamo verificare che se $f : A \to B$ è bigettiva e $f^{-1} : B \to A$ è la sua inversa, allora $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$ e $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$. Ricordiamo che se $\beta \in B$ allora l'insieme $f^{-1}(\beta) \subset A$ è non vuoto (perché f è surgettiva) e costituito da un unico elemento $\alpha \in A$ (perché f è iniettiva); per definizione $f(\alpha) = \beta$ (perché α è nella controimmagine di β). Vi ricordo anche che la funzione inversa f^{-1} calcolata in β vale proprio α. Quindi

$$(f \circ f^{-1})(\beta) = f(f^{-1}(\beta)) = f(\alpha) = \beta = \mathrm{Id}_B(\beta)$$

da cui dediciamo, dato che β è arbitrario, che $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$. Per dimostrare che $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$ procediamo analogamente: $(f^{-1} \circ f)(\alpha) = f^{-1}(f(\alpha))$; ma la funzione inversa applicata a $f(\alpha)$ è uguale all'unico elemento di A che ha come immagine $f(\alpha)$; questo elemento è, ovviamente, α. Conclusione $(f^{-1} \circ f)(\alpha) = \alpha = \mathrm{Id}_A(\alpha)$ e, dato che α è arbitrario, ne deduciamo che $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$.

Soluzione esercizio 4. Dobbiamo innanzitutto verificare l'associatività della composizione. Se f, g, h sono applicazioni di A in sé allora $((f \circ g) \circ h)(a)$ è uguale, per definizione di composizione, a $(f \circ g)(h(a))$ che è uguale, sempre per definizione di

$f \circ g$, all'elemento $f(g(h(a))$. È facile verificare che questo elemento è anche uguale a $(f \circ (g \circ h))(a)$ e quindi $\forall a \in A$

$$((f \circ g) \circ h)(a) = (f \circ (g \circ h))(a)$$

da cui l'associatività. Poi occorre trovare un elemento neutro; consideriamo l'applicazione identità Id_A. Si ha allora $f \circ \mathrm{Id}_A = f = \mathrm{Id}_A \circ f$ (basta applicare le definizioni); quindi Id_A è l'elemento neutro. Infine, per ogni f occorre trovare l'elemento inverso: dato che f è bigettiva basta prendere f^{-1} perché allora sappiamo che $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_A = f^{-1} \circ f$.

Soluzione esercizio 5. Consideriamo $A = \{1, 2, 3\}$. I sei elementi di $\mathcal{S}_3$ sono

$$\mathrm{Id}_A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \delta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \epsilon := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ha che $\delta \circ \alpha = \epsilon$ mentre $\alpha \circ \delta = \beta$; ne segue che

$$\delta \circ \alpha \neq \alpha \circ \delta$$

e quindi $\mathcal{S}_3$ **non** è un gruppo commutativo.

Soluzione esercizio 1.32 del libro di testo. Dobbiamo verificare che le operazioni in $\mathbb{R}$ inducuno in

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) := \{\alpha + \sqrt{3} \cdot \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

un'operazione di somma ed un'operazione di prodotto e che rispetto a queste operazioni $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ è un campo. È immediato verificare, utilizzando le proprietà di $\mathbb{R}$, che

$$(\alpha + \sqrt{3} \cdot \beta) + (\alpha' + \sqrt{3} \cdot \beta') = (\alpha + \alpha') + \sqrt{3} \cdot (\beta + \beta')$$
$$(\alpha + \sqrt{3} \cdot \beta) \cdot (\alpha' + \sqrt{3} \cdot \beta') = (\alpha \cdot \alpha' + 3\beta \cdot \beta') + \sqrt{3} \cdot (\alpha \cdot \beta' + \alpha \cdot \beta')$$

Dato che i membri a destra sono in $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ne deduciamo che $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ eredita da $\mathbb{R}$ le due operazioni, somma e prodotto [1]. Dalle proprietà di $\mathbb{R}$ otteniamo subito che $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ è un anello commutativo unitario con elemento neutro additivo $0 + \sqrt{3} \cdot 0 \equiv 0$ ed elemento neutro moltiplicativo $1 + \sqrt{3} \cdot 0 \equiv 1$. Rimane da vedere che questo anello commutativo unitario è un campo: sia $x \neq 0$ un elemento di $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ diverso dall'elemento neutro additivo; quindi $x = \alpha + \sqrt{3} \cdot \beta$ con α e β non entrambi nulli.. Sia

$$x^{-1} = \frac{1}{\alpha + \sqrt{3} \cdot \beta}$$

il suo inverso in $\mathbb{R}$. Moltiplichiamo e dividiamo x^{-1} per $\alpha - \sqrt{3} \cdot \beta$ ottenendo

$$x^{-1} = \frac{\alpha - \sqrt{3}\beta}{\alpha^2 - 3\beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 3\beta^2} + \sqrt{3} \cdot \frac{-\beta}{\alpha^2 - 3\beta^2}$$

e a destra c'e' un elemento di $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Soluzione esercizio 7.

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -1(\equiv -1 + i0),\ (-i)^4 = 1,\ (3+3i)(3-3i) = 18,\ \frac{(1+2i)}{(1-2i)} = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}.$$

[1] A priori la somma e/o il prodotto avrebbero potuto dare elementi fuori da $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

Soluzione esercizio 8. Dobbiamo determinare le radici quadrate di $w := 1-i4\sqrt{3}$. È subito visto che $|w| = \sqrt{49} = 7$. Sappiamo che se θ è l'argomento di w allora

$$\cos\theta = \frac{1}{7}\,, \quad \sin\theta = -\frac{4}{7}\sqrt{3} \tag{1}$$

e quindi

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm 2/\sqrt{7}\,, \quad \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}$$

Dalle formule per le radici n-me di un numero complesso w sappiamo che una delle due radici quadrate di w è $z_0 := |w|^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})$; l'altra deve essere per forza $-z_0$ (che può anche essere scritto come $z_1 := (|w|^{\frac{1}{2}}(\cos(\frac{\theta}{2}+\pi) + i\sin(\frac{\theta}{2}+\pi))$ in accordo con la Proposizione 4.23). Basta quindi determinare z_0; l'unico problema è decidere che segni prendere. Dalla (1) capiamo che θ si trova nel quarto quadrante; ne segue che $\theta/2$ è nel secondo quadrante e quindi

$$\cos\frac{\theta}{2} = -2/\sqrt{7}\,, \quad \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

da cui

$$z_0 = -2 + i\sqrt{3}$$

Soluzione esercizio 9. $z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ e quindi z^3 è reale se e solo se $(3x^2y - y^3) = 0$

Soluzione esercizio 10. Si ha $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$; per la formula di de Moivre ne segue che $(1+i)^{12} = 2^6(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = -2^6$.

Soluzione esercizio 11. Per la proposizione 4.23, le radici quarte dell'unità sono

$$z_0 = 1,\ z_1 = i\,,\ z_2 = -1,\ z_3 = -i$$