Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Soluzioni per gli esercizi della prima settimana.

Soluzione esercizio 2.6 del libro di testo.
Se $\underline{v} \in \mathcal{V}^2_O$ allora per trovare $F_{\mathcal{B}}(\underline{v})$ dobbiamo esprimere $\underline{v}$ in funzione di $\underline{i}$ e $\underline{j}$,

$$\underline{v} = \alpha\underline{i} + \beta\underline{j}\,,$$

e poi porre

$$F_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$$

Si ha:

$$\underline{i} = 1\underline{i} + 0\underline{j}$$

e quindi

$$F_{\mathcal{B}}(\underline{i}) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}\,.$$

Analogamente si procede per $F_{\mathcal{B}}(\underline{j})$.

Soluzione esercizio 2.7 del libro di testo.
È un semplice conto

$$\overline{OD_1} = (3\underline{i} + 2\underline{j}) - (2\underline{i} + \underline{j}) - 2(\underline{i} - 2\underline{j})$$

Dalle proprietà di spazio vettoriale di $\mathcal{V}^2_O$ otteniamo

$$\overline{OD_1} = (3 - 2 - 2)\underline{i} + (2 - 1 + 4)\underline{j} = -\underline{i} + 5\underline{j}$$

Quindi

$$F_{\mathcal{B}}(\overline{OD_1}) = \begin{vmatrix} -1 \\ 5 \end{vmatrix}\,.$$

Analogamente si procede con l'altro vettore.

Soluzione esercizio 2.8 del libro di testo.
Anche questo esercizio è molto semplice:

$$\overline{OD_1} = (\underline{i} - 4\underline{j}) + 2(-2\underline{i} - \underline{j}) + 3(\underline{i} + 2\underline{j}) = (1 - 4 + 3)\underline{i} + (-4 - 2 + 6)\underline{j} = 0\underline{i} + 0\underline{j} = \underline{0}$$

Analogamente per la seconda domanda.

Soluzione esercizio 2.9 del libro di testo.
Il vettore $\overline{OD}$ è uguale a $(6 + 2a)\underline{i} + (26 - a)\underline{j}$ e quindi è un multiplo di $\underline{j}$ se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$6 + 2a = t \cdot 0 \equiv 0 \quad \text{e} \quad 26 - a = t \cdot 1 \equiv t$$

Ciò accade se e solo se $a = -3$; per questo valore $\overline{OD} = 29\underline{j}$.

Soluzione esercizio 2.10 del libro di testo.
Del tutto analogo al precedente.

Soluzione esercizio 2.11 del libro di testo.
I due vettori sono proporzionali se e solo se [1] esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\overline{OA} = t\overline{OB}$ e quindi sse esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$2 = 2t \quad \text{e} \quad 3 = t$$

[1]se e solo se $\equiv$ sse

Un tale t non esiste (la seconda determina t che però sostituito nella prima non la soddisfa). Quindi i due vettori non sono proporzionali e possono essere presi come base di $\mathcal{V}_O^2$. Le coordinate del vettore $\overline{OC}$ rispetto a questa nuova base sono quei due numeri reali α e β tali che

$$\overline{OC} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB}$$

Riscriviamo questa uguaglianza in termini di $\underline{i}$ e $\underline{j}$:

$$\underline{i} + \underline{j} = \alpha(2\underline{i} + 3\underline{j}) + \beta(2\underline{i} + \underline{j})$$

e quindi

$$1 = 2\alpha + 2\beta \quad \text{e} \quad 1 = 3\alpha + \beta$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema di 2 equazioni nelle incognite α e β:

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 1 \\ 3\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

Ricavando β dalla seconda e sostituendolo nella prima determiniamo α; risostituendo questo valore di α nella seconda ricaviamo β (metodo di sotituzione). Svolgendo i calcoli si trova

$$\alpha = \frac{1}{4}\,, \quad \beta = \frac{1}{4}\,.$$

Soluzione esercizio 4.1 del libro di testo.
Denotiamo con $\underline{0}$ il vettore nullo di V (e cioè l'elemento neutro del gruppo commutativo $(V,+)$). Dato che $0 = 0+0$ si ha sicuramente $0\underline{v} = (0+0)\underline{v}$. Per distributività otteniamo $0\underline{v} = 0\underline{v}+0\underline{v}$. Aggiungendo ad ambo i membri l'opposto di $0\underline{v}$ otteniamo $0\underline{v} - 0\underline{v} = (0\underline{v} + 0\underline{v}) - 0\underline{v}$ che ci dà, per associatività, $\underline{0} = 0\underline{v} + \underline{0}$, e quindi $\underline{0} = 0\underline{v}$ che è quello che dovevamo verificare (senza utilizzare l'assioma 7).
Molto spesso scriviamo brevemente $\underline{v} - \underline{w}$ e non $\underline{v} + (-\underline{w})$.

Soluzione esercizio 4.2 del libro di testo.
Vi ricordo che $-\underline{v}$ è l'opposto di $\underline{v}$ nel gruppo commutativo $(V,+)$. In generale, l'opposto è univocamente determinato in un gruppo commutativo $(G,+)$ e, più in generale, l'inverso è univocamente determinato in un gruppo non-commutativo $(G,\cdot)$. Verifichiamo quest'ultima affermazione. Sia e l'elemento neutro di $(G,\cdot)$. Se

$$g \cdot g' = e = g' \cdot g \quad \text{e} \quad g \cdot g'' = e = g'' \cdot g$$

allora

$$g' = g' \cdot e = g' \cdot (g \cdot g'') = (g' \cdot g) \cdot g'' = e \cdot g'' = g''$$

e quindi $g' = g''$ come volevasi dimostrare.
Torniamo all'esercizio. Iniziamo con il verificare $(-1)\underline{v} + \underline{v} = \underline{0}$; ma $(-1)\underline{v} + \underline{v} = ((-1)+1)\underline{v} = 0\underline{v} = \underline{0}$ (per l'esercizio precedente). Vediamo ora che da $(-1)\underline{v}+\underline{v} = \underline{0}$ segue che $(-1)\underline{v} = \underline{v}$: aggiungendo ad ambo i membri di $(-1)\underline{v} + \underline{v} = \underline{0}$ il vettore $-\underline{v}$ ed applicando l'associatività otteniamo $(-1)\underline{v} + (\underline{v} - \underline{v}) = \underline{0} - \underline{v}$ che ci dà $(-1)\underline{v} + \underline{0} = -\underline{v}$ e cioè $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$.

Soluzione esercizio 4.3 del libro di testo.
Dobbiamo verificare che

$$\lambda\underline{v} = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ oppure } \underline{v} = \underline{0}\,.$$

Verifichiamo che

$$\lambda = 0 \text{ oppure } \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \lambda\underline{v} = \underline{0}\,.$$

Se $\lambda = 0$ allora l'asserto è vero per l'assioma 7) (oppure per l'esercizio 4.1). Se $\underline{v} = \underline{0}$ allora quale che sia λ si ha per $\underline{w}$ generico

$$\lambda\underline{0} = \lambda(\underline{w}+(-\underline{w})) = \lambda\underline{w}+\lambda(-\underline{w}) = \lambda\underline{w}+\lambda((-1)\underline{w}) = \lambda\underline{w}+(\lambda(-1))\underline{w} = \lambda\underline{w}+(-\lambda\underline{w}) = \underline{0}$$

dove abbiamo utilizzato vari assiomi e l'esercizio 4.2.
Verifichiamo ora che

$$\lambda\underline{v} = \underline{0} \quad \Rightarrow \lambda = 0 \text{ oppure } \underline{v} = \underline{0}\,.$$

Supponiamo che $\lambda\underline{v} = \underline{0}$. Se $\lambda = 0$ abbiamo finito. Se $\lambda \neq 0$ allora esiste λ^{-1} e si ha $\lambda^{-1}(\lambda\underline{v}) = \lambda\underline{0}$. Ma $\lambda\underline{0} = \underline{0}$ perché $\lambda\underline{0} = \lambda(\underline{0} + \underline{0})$, dato che $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$, e quindi $\lambda\underline{0} = \lambda\underline{0} + \lambda\underline{0}$ che ci dà $\underline{0} = \lambda\underline{0}$ aggiungendo ad ambo i membri l'opposto di $\lambda\underline{0}$. Quindi siamo arrivati a concludere che

$$\lambda^{-1}(\lambda\underline{v}) = \underline{0}$$

Consideriamo il membro a sinistra: dall'assioma 6 e dall'assioma 7 si ha

$$\lambda^{-1}(\lambda\underline{v}) = (\lambda^{-1}\lambda)\underline{v} = 1\underline{v} = \underline{v}$$

e quindi $\underline{v} = \underline{0}$ che era quello che dovevamo dimostrare.