Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2015-16. Prof. P. Piazza
Compito in classe del 20/5/2016

Esercizio 1. (Secondo esonero, a.a. 2011-12, De Sole-Piazza-Spinelli).
Consideriamo il polinomio $P(x) = 45 + 75X^2 + 15X^4 + 3X^5$. Stabilire se $P(X)$ è un elemento irriducibile in:

(1) $\mathbb{C}[X]$
(2) $\mathbb{R}[X]$
(3) $\mathbb{Q}[X]$
(4) $\mathbb{Z}[X]$
(5) $\mathbb{Z}_3[X]$
(6) $\mathbb{Z}_5[X]$

Esercizio 2. (Secondo esonero, a.a. 2011-12, De Sole-Piazza-Spinelli)
Sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Consideriamo l'insieme

$$I_n := \{f(x) \in \mathbb{Z}[X] \ \text{ tale che } \ n \,|\, f(3)\} \subset \mathbb{Z}[X].$$

2.1 Dimostrare che I_n è un'ideale di $\mathbb{Z}[X]$.
2.2 Determinare per quali valori di n l'ideale I_n è massimale.
Suggerimento: considerare un opportuno omomorfismo di anelli ϕ con dominio $\mathbb{Z}[X]$.

Esercizio 3. (Primo esame scritto, a.a. 2011-12, De Sole-Piazza-Spinelli)
Sia R un anello commutativo con unità con la proprietà che, per ogni $x \in R$, esiste un intero $n > 1$ tale che $x^n = x$. Dimostrare che un ideale $I \subset R$ è primo se e solo se è massimale.

Esercizio 4. (Simulazione di secondo esonero. De Sole. a.a. 2008-2009.).
Dimostrare che il polinomio $X^4 + 3X^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}X$.

Esercizio 5. Siano R, R' due anelli commutativi unitari e sia $\phi : R \to R'$ un omomorfismo. Sia I' un ideale di R'.
5.0. Verificare (nuovamente) che $\phi^{-1}(I')$ è un ideale di R.
5.1. Verificare che I' primo implica $\phi^{-1}(I')$ primo.
5.2. È vero che I' massimale implica $\phi^{-1}(I')$ massimale ?.
Suggerimento: $R = \mathbb{Z}[X]$, $R' = \mathbb{Q}[X]$, $I' = (x)$....
5.3. Supponiamo ora che ϕ sia suriettiva. È vero che I' massimale implica $\phi^{-1}(I')$ massimale ?

Compito a casa del 20/5/2016

Esercizio 1. Abbiamo visto nell'esercizio 4 del compito in classe che il polinomio $P(X) = X^4 + 3X^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[X]$.
1.2 Dimostrare che $P(X)$ è riducibile in $\mathbb{Z}_p[X]$ per ogni scelta di p primo.
Suggerimento: utilizzate la seguente informazione:
fra i tre elementi $\{[-1]_p, [5]_p, [-5]_p\}$ *almeno uno è un quadrato.*
1.2 Dimostrare che nessun traslato di $P(X)$, $T_{1,n}(P)$, soddisfa le ipotesi del criterio di Eisentein.