ALGEBRA 1 PB-Z
XI. 1 VI 2012

Esercizio 1. Siano A un anello e M un A-modulo sinistro.

Si mostri che, per ogni anello Ω e per ogni omomorfismo di anelli $\alpha : \Omega \to A$, è possibile definire su M, per mezzo di α, una struttura di Ω-modulo sinistro.

Si mostri che, se $B \subseteq A$ è un sottoanello di A, allora A è un B-modulo sinistro.

Esercizio 2. Sia $A[\mathrm{X}]$ l'anello dei polinomî in una indeterminata a coefficienti in un qualsivoglia anello A.

Si mostri che, dato comunque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'applicazione

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{S}_n : & A[\mathrm{X}] & \longrightarrow & A[\mathrm{X}] \\ & p(\mathrm{X}) & \longmapsto & \mathrm{S}_n(p(\mathrm{X})) \; = \; \mathrm{X}^n p(\mathrm{X}) \end{array}$$

- è un omomorfismo di A-moduli sinistri
- non è un omomorfismo di anelli.

Esercizio 3. Siano X un insieme non vuoto, A un anello e M un A-modulo sinistro.

Si mostri che l'insieme M^X i cui elementi son le applicazioni da X a M è dotato di una struttura di A-modulo sinistro.

Esercizio 4. Sia $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'anello delle funzioni reali di variabile reale che son derivabili con continuità infinite volte in ogni punto di $\mathbb{R}$.

Si mostri che l'applicazione

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{D} : & C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \mathrm{D}(f) = f' \end{array}$$

- è un omomorfismo di $\mathbb{R}$-moduli sinistri e di $\mathbb{R}$-moduli destri ([1])
- non è un omomorfismo di anelli.

[1] Sugg.: si ricordi o si provi che un modulo su un anello commutativo A è un A-modulo sinistro se e solo se è un A-modulo destro.

Esercizio 5. Si mostri la validità, in ogni anello commutativo, delle seguenti identità

$$
\begin{aligned}
(x_1^2+x_2^2)(x_3^2+x_4^2) &= (x_1x_3-x_2x_4)^2+(x_1x_4+x_2x_3)^2 \\
(x_1^2+x_2^2)(x_3^2+x_4^2) &= (x_1x_3+x_2x_4)^2+(x_1x_4-x_2x_3)^2
\end{aligned}
$$

Esercizio 6. Dello $\mathbb{Z}$-modulo $\mathbb{Z}^2$ si consideri il sottomodulo E definito come segue

$$E = \langle\ (5,12),\ (3,10),\ (2,14)\ \rangle\ \subseteq\ \mathbb{Z}^2$$

Si determini una base di E.

Si dica se $\mathbb{Z}^2/E$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero.