ALGEBRA 1 PB-Z
XI. 1 VI 2012

Esercizio 1. Siano A un anello e M un A-modulo sinistro.

Si mostri che, per ogni anello Ω e per ogni omomorfismo di anelli $\alpha : \Omega \to A$, è possibile definire su M, per mezzo di α, una struttura di Ω-modulo sinistro.

Si mostri che, se $B \subseteq A$ è un sottoanello di A, allora A è un B-modulo sinistro.

Soluzione. Mi limiterò a mostrare quali siano le operazioni che rendono M un Ω-modulo, lasciando al lettore la verifica della validità delle condizioni elencate nella definizione di modulo.

Somma.

Poiché, per ipotesi, M è un A-modulo, esiste su M un'operazione $+$ che lo rende un gruppo commutativo.

L'operazione di somma che considererermo su M allorquando vorremo parlar di lui come di un Ω-modulo sarà esattamente l'operazione $+$ sopra ricordata.

Moltiplicazione per uno scalare.

Dati comunque $x \in \Omega$ e $m \in M$, definiamo il prodotto $x.m$ di x per m ponendo

$$x.m \;=\; \alpha(x).m$$

Vorrei farVi notare che, nel verificare la validità delle condizioni elencate nella definizione di modulo, sarà di fondamentale importanza il fatto che α sia un omomorfismo di anelli.

Per mostrare che, dato un sottoanello $B \subseteq A$ di A, è possibile definire su A una struttura di B-modulo sinistro, basta osservare che

I. A è un A-modulo

II. l'applicazione di inclusione $\iota : B \hookrightarrow A$ è un omomorfismo di anelli

e rifarsi alle considerazioni sopra esposte.

Esercizio 2. Sia $A[\mathrm{X}]$ l'anello dei polinomî in una indeterminata a coefficienti in un qualsivoglia anello A.

Si mostri che, dato comunque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'applicazione

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{S}_n : & A[\mathrm{X}] & \longrightarrow & A[\mathrm{X}] \\ & p(\mathrm{X}) & \longmapsto & \mathrm{S}_n(p(\mathrm{X})) = \mathrm{X}^n p(\mathrm{X}) \end{array}$$

- è un omomorfismo di A-moduli sinistri
- non è un omomorfismo di anelli.

Soluzione. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fissato.

Per mostrare che S_n è un omomorfismo di A-moduli, occorre mostrare che, dati comunque $p_1(\mathrm{X}),\ p_2(\mathrm{X}),\ p(\mathrm{X}) \in A[\mathrm{X}]$ e $a \in A$, abbiamo

$$\mathrm{S}_n(p_1(\mathrm{X})+p_2(\mathrm{X})) = \mathrm{S}_n(p_1(\mathrm{X}))+\mathrm{S}_n(p_2(\mathrm{X})) \text{ e, rispettivamente, } \mathrm{S}_n(ap(\mathrm{X})) = a\mathrm{S}_n(p(\mathrm{X}))$$

Ora, queste dimostrazioni son presto fatte. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_n(p_1(\mathrm{X}) + p_2(\mathrm{X})) &= \mathrm{X}^n(p_1(\mathrm{X}) + p_2(\mathrm{X})) \\ &= \mathrm{X}^n p_1(\mathrm{X}) + \mathrm{X}^n p_2(\mathrm{X}) \\ &= \mathrm{S}_n(p_1(\mathrm{X})) + \mathrm{S}_n(p_2(\mathrm{X})) \end{aligned}$$

e, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_n(ap(\mathrm{X})) &= \mathrm{X}^n(ap(\mathrm{X})) \\ &= a\mathrm{X}^n p(\mathrm{X}) \\ &= a\mathrm{S}_n(p(\mathrm{X})) \end{aligned}$$

Per mostrare che S_n non è un omomorfismo di anelli, occorre mostrare che, dati comunque $p_1(\mathrm{X}),\ p_2(\mathrm{X}) \in A[\mathrm{X}]$, abbiamo

$$\mathrm{S}_n(p_1(\mathrm{X})p_2(\mathrm{X})) \neq \mathrm{S}_n(p_1(\mathrm{X}))\mathrm{S}_n(p_2(\mathrm{X}))$$

Ora, questa dimostrazione è presto fatta. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_n(p_1(\mathrm{X})p_2(\mathrm{X})) &= \mathrm{X}^n p_1(\mathrm{X})p_2(\mathrm{X}) \\ &\neq \mathrm{X}^n p_1(\mathrm{X})\mathrm{X}^n p_2(\mathrm{X}) \\ &= \mathrm{S}_n(p_1(\mathrm{X}))\mathrm{S}_n(p_2(\mathrm{X})) \end{aligned}$$

Esercizio 3. Siano X un insieme non vuoto, A un anello e M un A-modulo sinistro. Si mostri che l'insieme M^X i cui elementi son le applicazioni da X a M è dotato di una struttura di A-modulo sinistro.

Soluzione. Mi limiterò a mostrare quali siano le operazioni che rendono M^X un Ω-modulo, lasciando al lettore la verifica della validità delle condizioni elencate nella definizione di modulo.

Somma.

Per ogni $\beta_1,\ \beta_2 \in M^X$; ossia, per ogni $\beta_1,\ \beta_2 : X \to M$, definiamo la funzione somma di β_1 e β_2, denotata $\beta_1 + \beta_2 : X \to M$, come quella funzione che, sugli elementi di X, agisce nel modo seguente

$$X \ \ni \ x \ \longmapsto \ (\beta_1 + \beta_2)(x) \ = \ \beta_1(x) + \beta_2(x) \ \in \ M$$

Moltiplicazione per uno scalare.

Dati comunque $a \in A$ e $\beta \in M^X$, definiamo la funzione prodotto di a per β, denotata $a.\beta : X \to M$, come quella funzione che, sugli elementi di X, agisce nel modo seguente

$$X \ \ni \ x \ \longmapsto \ (a.\beta)(x) \ = \ a \cdot \beta(x) \ \in \ M,$$

essendo $\cdot : A \times M \to M$ la "moltiplicazione per uno scalare" che rende M un A-modulo.

Esercizio 4. Sia $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'anello delle funzioni reali di variabile reale che son derivabili con continuità infinite volte in ogni punto di $\mathbb{R}$.

Si mostri che l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{D}: & C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ \\ & f & \longmapsto & \mathrm{D}(f) = f' \end{array}$$

- è un omomorfismo di $\mathbb{R}$-moduli sinistri e di $\mathbb{R}$-moduli destri ([1])
- non è un omomorfismo di anelli.

Soluzione. Iniziamo con l'osservare che, essendo $\mathbb{R}$ un anello commutativo, ogni $\mathbb{R}$-modulo sinistro è anche un $\mathbb{R}$-modulo destro e viceversa.

Per mostrare che D è un omomorfismo di $\mathbb{R}$-moduli, occorre mostrare che, dati comunque $f_1,\ f_2,\ f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\mathrm{D}(f_1+f_2) \;=\; \mathrm{D}(f_1)+\mathrm{D}(f_2) \;\text{ e, rispettivamente, }\; \mathrm{D}(cf) \;=\; c\mathrm{D}(f)$$

Ora, queste dimostrazioni son presto fatte. Infatti, abbiamo

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}(f_1+f_2) & = & (f_1+f_2)' \\ & = & f_1'+f_2' \\ & = & \mathrm{D}(f_1)+\mathrm{D}(f_2) \end{array}$$

e, rispettivamente,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}(cf) & = & (cf)' \\ & = & c(f') \\ & = & c\mathrm{D}(f) \end{array}$$

Per mostrare che D non è un omomorfismo di anelli, occorre mostrare che, dati comunque $f_1,\ f_2 \in\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, abbiamo

$$\mathrm{D}(f_1f_2) \;\neq\; \mathrm{D}(f_1)\mathrm{D}(f_2)$$

Ora, questa dimostrazione è presto fatta. Infatti, abbiamo

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}(f_1f_2) & = & (f_1f_2)' \\ & = & f_1'f_2+f_1f_2' \\ & \neq & f_1'f_2' \\ & = & \mathrm{D}(f_1)\mathrm{D}(f_2) \end{array}$$

[1]Sugg.: si ricordi o si provi che un modulo su un anello commutativo A è un A-modulo sinistro se e solo se è un A-modulo destro.

Esercizio 5. Si mostri la validità, in ogni anello commutativo, delle seguenti identità

$$\begin{aligned}(x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2) &= (x_1x_3 - x_2x_4)^2 + (x_1x_4 + x_2x_3)^2\\ (x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2) &= (x_1x_3 + x_2x_4)^2 + (x_1x_4 - x_2x_3)^2\end{aligned}$$

Soluzione. A proposito della prima identità

$$\begin{aligned}(x_1x_3 - x_2x_4)^2 + (x_1x_4 + x_2x_3)^2 &= x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 - 2x_1x_3x_2x_4 + 2x_1x_4x_2x_3\\ &= x_1^2(x_3^2 + x_4^2) + x_2^2(x_3^2 + x_4^2)\\ &= (x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2)\end{aligned}$$

A proposito della seconda identità

$$\begin{aligned}(x_1x_3 + x_2x_4)^2 + (x_1x_4 - x_2x_3)^2 &= x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + 2x_1x_3x_2x_4 - 2x_1x_4x_2x_3\\ &= x_1^2(x_3^2 + x_4^2) + x_2^2(x_3^2 + x_4^2)\\ &= (x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2)\end{aligned}$$

Esercizio 6. Dello $\mathbb{Z}$-modulo $\mathbb{Z}^2$ si consideri il sottomodulo E definito come segue

$$E = \langle\ (5, 12),\ (3, 10),\ (2, 14)\ \rangle\ \subseteq\ \mathbb{Z}^2$$

Si determini una base di E.

Si dica se $\mathbb{Z}^2/E$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero.

Soluzione. Per risolvere il problema della determinazione di una base di E, applichiamo il metodo descritto a pagina 546 di "Algebra" di M. Artin (si vedano anche le pagine 541-546).

Il sottogruppo E di $\mathbb{Z}^2$ è generato dalle colonne della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 12 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

L'applicazione delle seguenti operazioni elementari trasforma la matrice A nella matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

EccoVi le operazioni da me trovate

1. sostituisco la II colonna con la colonna ottenuta addizionando la II colonna alla III colonna ([2])

2. sostituisco la II colonna con la colonna ottenuta sottraendo la I colonna alla II colonna ([3])

3. sostituisco la I colonna con la colonna ottenuta sottraendo la II colonna alla I colonna ([4])

4. sostituisco la III colonna con la colonna ottenuta sottraendo la II colonna alla III colonna ([5])

5. sostituisco la II colonna con la colonna ottenuta sottraendo 6 volte la III colonna alla II colonna ([6])

---

[2] La matrice che descrive questa operazione è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[3] La matrice che descrive questa operazione è $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[4] La matrice che descrive questa operazione è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[5] La matrice che descrive questa operazione è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[6] La matrice che descrive questa operazione è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

6. sostituisco la I colonna con la colonna ottenuta addizionando la I alla II colonna ([7])

7. sostituisco la III colonna con la colonna ottenuta sottraendo 2 volte la I colonna alla III colonna ([8])

8. sostituisco la II colonna con la colonna ottenuta addizionando 6 volte la I colonna alla II colonna ([9])

9. scrivo la II colonna al posto della III e la III colonna al posto della II ([10])

I risultati che le varie operazioni elementari qui sopra descritte danno sono i seguenti

Applicando 1. alla matrice $A_0 = A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 12 & 10 & 14 \end{pmatrix}$, ottengo la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 12 & 24 & 14 \end{pmatrix}$

Applicando 2. alla matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 12 & 24 & 14 \end{pmatrix}$, ottengo la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 12 & 12 & 14 \end{pmatrix}$

Applicando 3. alla matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 12 & 12 & 14 \end{pmatrix}$, ottengo la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 14 \end{pmatrix}$

Applicando 4. alla matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 14 \end{pmatrix}$, ottengo la matrice $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 2 \end{pmatrix}$

Applicando 5. alla matrice $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 2 \end{pmatrix}$, ottengo la matrice $A_5 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Applicando 6. alla matrice $A_5 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ottengo la matrice $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Applicando 7. alla matrice $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ottengo la matrice $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Applicando 8. alla matrice $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ottengo la matrice $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Applicando 9. alla matrice $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ottengo la matrice $A' = A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

---

[7] La matrice che descrive questa operazione è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[8] La matrice che descrive questa operazione è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[9] La matrice che descrive questa operazione è $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[10] La matrice che descrive questa operazione è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le varie operazioni elementari sopra descritte sono il risultato della moltiplicazione a destra di A della seguente matrice P^{-1}, ottenuta come prodotto delle matrici elementari che servono per effettuare le operazioni da 1. a 9. di cui ho or ora detto.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 11 & -37 \\ 6 & -13 & 43 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora, posto $Q = \mathrm{Id}$ abbiamo $Q^{-1}A' = AP^{-1}$. Quindi, a meno dei cambiamenti di base determinati, via la base canonica di $\mathbb{Z}^2$ e le colonne di A, dalle matrici Q e P, i generatori di E sono gli $\mathbb{Z}$-vettori $(1,0)$ e $(0,2)$.

A questo punto siamo in grado di risolvere anche il secondo dei problemi che ci son stati posti. Infatti, a meno dei cambiamenti di base determinati, via la base canonica di $\mathbb{Z}^2$ e le colonne di A, dalle matrici Q e P, il $\mathbb{Z}$-modulo E è immagine del morfismo β qui sotto descritto.

$$\begin{array}{rccl} \beta: & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & E \\ & (a_1, a_2) & \longmapsto & \beta((a_1, a_2)) = (a_1, 2a_2) \end{array}$$

Quindi, poiché $\ker \beta = \{(0,0)\}$ ([11]), l'applicazione β è un isomorfismo. Così, grazie al teorema fondamentale degli omomorfismi di moduli, abbiamo

$$E \approx \mathbb{Z}^2$$

Quindi E è un $\mathbb{Z}$-modulo libero di rango 2.

Ora, la relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}^2$ associata al sottomodulo $E \subseteq \mathbb{Z}^2$, denotata $\sim_E$, può esser descritta nel modo seguente

per ogni $(a_1, b_1),\ (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^2$ porremo $(a_1, b_1) \sim_E (a_2, b_2) \iff (a_1, b_1) - (a_2, b_2) \in E$

Quindi, secondo la definizione, avremo che $(a_1, b_1),\ (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^2$ saranno equivalenti modulo $\sim_E$ se e solo se

$$(a_1 - a_2,\ b_1 - b_2) \in E;$$

ossia, se e solo se esiste un elemento $(q_1,\ q_2)$ di E tale che

$$(a_1 - a_2,\ b_1 - b_2) = (q_1,\ q_2) \in E;$$

ossia, essendo ogni elemento di $E = \langle (1,0), (0,2) \rangle$ della forma $(k_1, 2k_2)$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, se e solo se esistono $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}$ tali che $(q_1,\ q_2) = (h_1,\ 2h_2) \in E$ e, dunque, tali che

$$(a_1 - a_2,\ b_1 - b_2) = (h_1,\ 2h_2) \in E;$$

[11] Si prega il lettore di verificare questo fatto.

ossia, se e solo se esistono $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\begin{cases} a_1 - a_2 & = & h_1 \\ b_1 - b_2 & = & 2h_2 \end{cases}$$

ossia, se e solo se

$$\begin{cases} a_1 & \equiv_1 & a_2 \\ b_1 & \equiv_2 & b_2 \end{cases}$$

Dunque, da quanto detto, avremo che (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^2$ saranno equivalenti modulo $\sim_E$ se e solo se

a_1 e a_2 appartengono alla stessa classe di equivalenza di $\mathbb{Z} \ / \equiv_1$

e

b_1 e b_2 appartengono alla stessa classe di equivalenza di $\mathbb{Z} \ / \equiv_2$.

Quindi, per quanto detto, esiste un isomorfismo ε di $\mathbb{Z}$-moduli tra $\mathbb{Z}^2/E = \mathbb{Z}^2/\sim_E$ e $\mathbb{Z} \ / \equiv_1 \ \times \ \mathbb{Z} \ / \equiv_2$.

$$\begin{aligned} \varepsilon : \quad \mathbb{Z}^2/E & \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathbb{Z}/\equiv_1 \ \times \ \mathbb{Z}/\equiv_2 \\ (a,b) + E & \quad \longmapsto \quad \varepsilon((a,b)+E) = ([a]_{\equiv_1}, \ [b]_{\equiv_2}) \end{aligned}$$

Ora, ricordando che la relazione $\equiv_1$ e la relazione totale su $\mathbb{Z}$ coincidono, abbiamo che il quoziente $\mathbb{Z} \ / \equiv_1$ è uguale altri non è che un sol punto, che chiamerò $\star$; ossia, $\mathbb{Z} \ / \equiv_1 \ = \ \{\star\}$.

Ne segue che $\mathbb{Z}/\equiv_1 \ \times \ \mathbb{Z}/\equiv_2$ è isomorfo, come $\mathbb{Z}$-modulo al modulo $\mathbb{Z}/\equiv_2$.

Dunque, da

$$\mathbb{Z}^2/E \xleftrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/\equiv_1 \ \times \ \mathbb{Z}/\equiv_2 \ \xleftrightarrow{\sim} \ \mathbb{Z}/\equiv_2,$$

abbiamo che $\mathbb{Z}^2/E$, considerato come $\mathbb{Z}$-modulo, è **non** libero.