Matematica III

Prof. Paolo Piazza

Secondo esonero. 19-12-2018.

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola : ____________________

email: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE SPENTI E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. (di teoria)
(1) Enunciare il *teorema di Schwarz.*
(2) Sia D un aperto in $\mathbb{R}^2$ e sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile parzialmente in D. Sia $(x_0, y_0) \in D$. Sotto quali ulteriori ipotesi f è anche differenziabile in (x_0, y_0)? Enunciare il relativo teorema.
(3)
(3.1) Sia $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizzata regolare, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$.
Dare una formula che calcoli la lunghezza $L(\sigma)$.
(3.2) Vero o Falso: se $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ e $\sigma' : [a', b'] \to \mathbb{R}^2$ sono due curve regolari parametrizzate e se esiste $h : [a, b] \to [a', b']$ bigettiva C^1 e con derivata mai nulla tale che $\sigma = \sigma' \circ h$ allora $L(\sigma) = L(\sigma')$.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 2.
Utilizzando un opportuno cambiamento di variabili calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D (2x-y)^2 dxdy$$

con D uguale al parallelogramma compreso fra le rette

$$r_1 : x+y=0, \quad r_2 : x+y=5 \qquad \text{e} \qquad s_1 : 2x-y=-1, \quad s_2 : 2x-y=2.$$

Soluzione:

Risposta:

1) $\iint_D (2x-y)^2 dxdy =$ $\boxed{}$

Esercizio 3. Sia D la regione del piano compresa fra la cicloide di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e l'asse x. (La cicloide è la curva per l'origine descritta da un punto fisso sulla circonferenza unitaria quando questa rotola lungo l'asse x.)
Utilizzando uno dei corollari del Teorema di Gauss-Green calcolare l'area di D.
Suggerimento. Le formule trigonometriche

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)), \quad \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$$

possono essere utili.

Soluzione:

Risposta:

1) Area di $D =$ $\boxed{}$

Esercizio 4.
Sia C la curva di equazioni $F(x,y)=0$, con $F(x,y)=x^2+y^2-1$. Sia $f(x,y)$ la funzione $f(x,y)=y^3+4x^2y-4y$.
Dopo aver spiegato perché f ammette massimo e minimo in C **utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange** per determinare tali punti di massimo e minimo di f in C ed il relativo valore.

Soluzione:

Risposta:

Punti max/min		valori max/min	

Esercizio 5. Consideriamo la funzione $F(x,y)$ definita da

$$F(x,y) := e^{x^2+y^2} - x^2 - 2y^2 + 2\sin y - 1$$

(i) Dimostrare che F definisce implicitamente in un intorno di $(0,0)$ una funzione $y = f(x)$.
(ii) Dimostrare che $x = 0$ è un punto critico di f.
(iii) Determinarne la natura del punto critico $x = 0$.

Soluzione:

Risposta: