Corso di Laurea Triennale a.a. 2018-19
Geometria Differenziale
Ulteriori esercizi di preparazione all'esame

Esercizio 1. *(esame 15/1/2007) Sia* $\sigma : (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$ *la curva parametrizzata definita da* $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, \log \sin t)$. *Verificare che* σ *è regolare. Determinare la curvatura di* σ *in ogni punto. Verificare che* σ *è biregolare.*

Esercizio 2. *(esame 7/2/2007) Si consideri il sottoinsieme di* $\mathbb{R}^3$ *dato da* $C := S_1 \cap S_2$, *con* $S^1 := \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *e* $S^2 := \{(x, y, z) \,|\, y^2 + (x-1)^2 = 1\}$. *Stabilire se* C *è una 1-sottovarietà di* $\mathbb{R}^3$.

Definizione. Consideriamo una curva biregolare $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ e supponiamo che σ non sia piana. Diremo che σ è un'elica generalizzata se esiste $c \in \mathbb{R} \setminus 0$ tale che $\tau(t) = c\kappa(t)$ $\forall t \in I$.

Esercizio 3. *Dimostrare che se* $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ *è un'elica generalizzata allora esiste un versore* $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ *tale che* $< \underline{v}, \underline{t}(s) >= costante$ $\forall s \in I$, *con* $\underline{t}(s)$ *il versore tangente a* σ *in* $\sigma(s)$. *Potete supporre* σ *parametrizzata secondo la lunghezza d'arco.* [1]

Esercizio 4. *(esame 15/1/2007) Sia* $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ *una parametrizzazione locale di una superficie regolare. Supponiamo che* $E(u, v) \equiv E(u)$, $F(u, v) \equiv 0$, $G(u, v) \equiv G(u)$.
Verificare che le u*-curve* $v = v_0$ *sono geodetiche.*
Verificare che le v*-curve* $u = u_0$ *sono geodetiche se e solo se* $\partial G/\partial u\big|_{u=u_0} \equiv 0$.

Esercizio 5. *(esame 7/2/2007) Sia* $S = \{(x, y, z) \,|\, z = xy\}$ *parametrizzata da* $\phi(u, v) = (u, v, uv)$ *e sia* $P = (1, 1, 1) \in S$.

- *Verificare che* $\underline{v}_p := (1, 1, 2)$ *è un elemento di* $T_P S$, *determinandone le coordinate rispetto alla base indotta da* ϕ.
- *Determinare il versore normale* N *definito da* ϕ.
- *Calcolare la curvatura normale di* S *in* P *lungo la direzione associata a* $\underline{v}_p$.
- *Determinare la matrice associata a* dN_P *nella base indotta da* ϕ.
- *Determinare le curvature principali, le direzioni principali e la curvatura Gaussiana di* S *in* P.

[1] *Suggerimenti.* Utilizzate le formule di Frenet-Serret. Cominciate col far vedere, derivando la condizione $< \underline{v}, \underline{t}(s) >= costante$, che se un tale $\underline{v}$ esiste allora $\underline{v} \in \mathrm{Span}(\underline{t}(s), \underline{b}(s))$ $\forall s \in I$. Scrivete allora $\underline{v} = \alpha(s)\underline{t}(s) + \beta(s)\underline{b}(s)$ con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Derivando ambo i membri dell'uguaglianza $\underline{v} = \alpha\underline{t}(s) + \beta\underline{b}(s)$ ......

Esercizio 6. *(esame 7/2/2015) Sia S il semicono di equazione $x^2 + y^2 = 2z^2, z > 0$. Sia S' il paraboloide iperbolico di equazione $z = xy$. Si consideri l'applicazione f definita da*

$$S \ni (x, y, z) \longrightarrow (x, yz, xyz) \in \mathbb{R}^3$$

Spiegare perché l'applicazione f definisce un'applicazione differenziabile da S in S'.
Sia $P = (1, 1, 1) \in S$; determinare una parametrizzazione locale $\phi : U \to S$ di S intorno a P della forma $\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), v)$; considerare la parametrizzazione naturale di S', che è un grafico; denotiamo tale parametrizzazione con ψ.

- *determinare le basi indotte da queste parametrizzazioni in $T_P S$ e $T_{f(P)}S'$ rispettivamente;*
- *determinare la matrice associata a $df_P; T_P S \to T_{f(P)}S'$ rispetto alle basi appena trovate;*
- *verificare che $\underline{v} := (0, 2, 1) \in T_P S$; calcolare $df_P(\underline{v})$.*

Esercizio 7. *Sia S la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva*

$$\sigma(t) = (t, 0, \log t) \quad t > 0.$$

Sia $\phi : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione $\phi(t, u) = (t \cos u, t \sin u, \log t)$.
1) Calcolare curvature principali e direzioni principali in ogni punto di $\phi(U) \subset S$.
2) Stabilire se la curva $\gamma(t) = (t \cos(t - 1), t \sin(t - 1), \log t)$, $t \in (1, 2\pi + 1)$, è una linea asintotica.

Esercizio 8. *Sia S la superficie data dalla parametrizzazione locale $\phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^3)$. Studiare la natura dei punti di S (ellittici, iperbolici etc...). Decidere se in un intorno del punto parabolico $O := (0, 0, 0)$, S giace o meno in uno dei due semispazi definiti dal piano tangente $T_O S$.*

Esercizio 9. *Consideriamo l'ellissoide S di equazione $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ Consideriamo l'intersezione di S con il piano π_u di equazione $z = u$, sia essa $\mathcal{C}_u$. Spiegare perché tale intersezione $\mathcal{C}_u$ è una 1-sottovarietà; parametrizzare $\mathcal{C}_u$.*
Determinare per quali u la curva $\mathcal{C}_u \subset S$ è una geodetica.

Esercizio 10. *(esame 8/2/2006) Sia $J \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ la matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

con $\mathrm{Id} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *la matrice identità. Il gruppo simplettico è definito come*

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid A^T J A = J.\}$$

Dimostrare che il gruppo simplettico è una sottovarietà di $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ *e che la sua dimensione è* $n(2n + 1)$.
Suggerimenti: (i) osservare che $J^T = -J$. *(ii) cercate di determinare un sottospazio vettoriale* A *di* $M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$*, un'applicazione differenziabile* $\omega : \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \to A$ *ed un valore regolare* $a \in A$ *tali che* $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) = \omega^{-1}(a)$.