ALGEBRA 1 PB-Z
IX. 18 V 2012

Esercizio 1. Sia A un anello e siano $I_1 \subseteq A$ e $I_2 \subseteq A$ ideali sinistri di A.

Si mostri che l'insieme $I_1 + I_2$, definito da $I_1 + I_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in I_1, x_2 \in I_2\}$, è un ideale sinistro di A.

Si mostri che gli enunciati ottenuti sostituendo all* parol* "sinistr* " l* parol* "destr* " o l* parol* "bilater* " sono pure veri.

Soluzione. Mostreremo che l'insieme $I_1 + I_2 \subseteq A$ definito da $I_1 + I_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in I_1, x_2 \in I_2\}$ è un ideale sinistro di A, provando che è un sottogruppo additivo di A e che verifica la proprietà di assorbimento a sinistra.

L'insieme $I_1 + I_2 \subseteq A$ è un sottogruppo additivo di A. Infatti, dati comunque $x_1' + x_2'$, $x_1'' + x_2''$ elementi di $I_1 + I_2$, con x_1', $x_1'' \in I_1$ e x_2', $x_2'' \in I_2$, allora la loro differenza è pure un elemento di $I_1 + I_2$, 'ché, da un lato, abbiamo, $x_1' - x_1'' \in I_1$, $x_2' - x_2'' \in I_2$ ([1]) e, da un altro lato, abbiamo

$$(x_1' + x_2') - (x_1'' + x_2'') = (x_1' - x_1'') + (x_2' - x_2''),$$

così che, finalmente, $(x_1' + x_2') - (x_1'' + x_2'') \in I_1 + I_2$.

L'insieme $I_1 + I_2 \subseteq A$ verifica la proprietà di assorbimento a sinistra. Infatti, dati comunque, $a \in A$ e $x_1 + x_2 \in I_1 + I_2$, con $x_1 \in I_1$ e $x_2 \in I_2$, allora $a(x_1 + x_2)$ è pure un elemento di $I_1 + I_2$, 'ché, da un lato, abbiamo $ax_1 \in I_1$, $ax_2 \in I_2$ ([2]) e, da un altro lato, abbiamo

$$a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2,$$

così che, finalmente, $a(x_1 + x_2) \in I_1 + I_2$.

Le verifche da fare nel caso destro son del tutto analoghe a quelle or ora scritte a propoisto del caso sinistro.

Il caso bilatero, infine, è diretta conseguenza di entrambi i casi sinistro e destro.

[1]Entrambi I_1 e I_2 sono sottogruppi additivi di A.

[2]Essendo ideali sinistri di A, entrambi I_1 e I_2 verificano la propietà di assorbimento a sinistra.

Esercizio 2. Sia A un anello commutativo unitario e siano $I_1 \subseteq A$ e $I_2 \subseteq A$ ideali di A.

Si mostri che entrambi $I_1 \cap I_2$ e $I_1 + I_2$ sono ideali di A e che, detto $\langle I_1 I_2 \rangle$ l'ideale generato da $I_1 I_2$, risulta

$$\langle I_1 I_2 \rangle = \left\{ \sum_{h=1}^{n} x_{1,h} x_{2,h} \mid x_{1,h} \in I_1,\ x_{2,h} \in I_2,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$ [3] [4] [5] [6].

Si mostri che entrambi I_1 e I_2 sono ideali dell'anello (non unitario) $I_1 + I_2$ e che $I_1 \cap I_2$ è un ideale di entrambi gli anelli (anch'essi non unitarî) I_1 e I_2.

Per $k \in \{1, 2\}$, siano $\iota_k : I_k \hookrightarrow I_1 + I_2$ e $\pi_k : I_1 + I_2 \to (I_1 + I_2)/I_k$ gli omomorfismi naturali. Data una coppia $(k_1, k_2) \in \{1, 2\}^2$, con $k_1 \neq k_2$, si definisca $\alpha_{(k_1,k_2)}$ ponendo $\alpha_{(k_1,k_2)} = \pi_{k_2} \circ \iota_{k_1}$; naturalmente, $\alpha_{(k_1,k_2)} : I_{k_1} \to (I_1 + I_2)/I_{k_2}$.

Si mostri che, per ogni $(k_1, k_2) \in \{1, 2\}^2$, $k_1 \neq k_2$, l'omomorfismo $\alpha_{(k_1,k_2)}$ è suriettivo e che $\ker \alpha_{(k_1,k_2)} = I_1 \cap I_2$. Se ne deduca che, per ogni $(k_1, k_2) \in \{1, 2\}^2$, con $k_1 \neq k_2$, si ha $I_{k_1}/(I_1 \cap I_2) \approx (I_1 + I_2)/I_{k_2}$.

Soluzione. Mostreremo che $I_1 \cap I_2$ è un ideale di A, provando che è un sottogruppo additivo di A e che verifica sia la proprietà di assorbimento a sinistra sia quella a destra.

L'insieme $I_1 \cap I_2$ è un sottogruppo additivo di A. Infatti, dati comunque x', x'' elementi di $I_1 \cap I_2$, allora la loro differenza è pure un elemento di $I_1 \cap I_2$, 'ché abbiamo $x' - x'' \in I_1$ e $x' - x'' \in I_2$ [7] e, quindi, $x' - x'' \in I_1 \cap I_2$.

L'insieme $I_1 \cap I_2 \subseteq A$ verifica la proprietà di assorbimento a sinistra e, dunque, per la commutatività del prodotto, quella a destra. Infatti, dati comunque, $a \in A$ e $x \in I_1 \cap I_2$, allora ax è pure un elemento di $I_1 \cap I_2$, 'ché abbiamo $ax \in I_1$ e $ax \in I_2$ [8] e, quindi, $ax \in I_1 \cap I_2$.

Che $I_1 + I_2$ sia un ideale di A segue da quanto detto a proposito dell'esercizio 1.

Sia $\mathrm{P}(I_1, I_2)$ l'insieme definito da

$$\mathrm{P}(I_1, I_2) = \left\{ \sum_{h=1}^{n} x_{1,h} x_{2,h} \mid x_{1,h} \in I_1,\ x_{2,h} \in I_2,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

[3] Per la definizione di $I_1 + I_2$ si veda il testo dell'esercizio 1.

[4] Per definizione, $\langle I_1 I_2 \rangle = \bigcap\{I \mid I \subseteq A,\ I \text{ ideale},\ I_1 I_2 \subseteq I\}$. Naturalmente, $I_1 I_2 \subseteq \langle I_1 I_2 \rangle$.

[5] Sugg.: dopo aver mostrato che è un ideale, si provi che il membro di destra dell'uguaglianza, oltre a esser contenuto in $\langle I_1 I_2 \rangle$, contiene $I_1 I_2$ e, quindi, $\langle I_1 I_2 \rangle$, perché ideale.

[6] Si osservi che, se $I_1 = I_2$, allora $\langle I_1 I_2 \rangle = I_1 I_2 = \{x_1 x_2 | x_1 \in I_1, x_2 \in I_2\}$. Scrivendo $I = I_1$, $I = I_2$, abbiamo, dunque, $\langle I^2 \rangle = I^2 = \{x_1 x_2 | x_1, x_2 \in I\}$.

[7] Appartenendo all'intersezione $I_1 \cap I_2$, gli elementi x' e x'' appartengono sia a I_1, sia a I_2; inoltre, entrambi I_1 e I_2 sono sottogruppi additivi di A; dunque, e $x' - x'' \in I_1$ e $x' - x'' \in I_2$.

[8] Appartenendo all'intersezione $I_1 \cap I_2$, l'elemento x appartiene sia a I_1, sia a I_2; inoltre, essendo ideali sinistri di A, entrambi I_1 e I_2 verificano la propietà di assorbimento a sinistra; dunque, e $ax \in I_1$ e $ax \in I_2$.

Allora $\mathrm{P}(I_1, I_2)$ è l'insieme di tutte le somme finite dei prodotti tra gli elementi di I_1 e quelli di I_2.

Mostreremo che $\mathrm{P}(I_1, I_2)$ coincide con $\langle I_1 I_2 \rangle$, provando che è un ideale di A, che contiene $I_1 I_2$ e, quindi, essendo un ideale, $\langle I_1 I_2 \rangle$ e che è contenuto in $\langle I_1 I_2 \rangle$.

L'insieme $\mathrm{P}(I_1, I_2)$ è un sottogruppo additivo di A. Infatti, dati comunque p' e p'' elementi di $\mathrm{P}(I_1, I_2)$, con

$$p' = \sum_{h'=1}^{n'} x'_{1,h'} x'_{2,h'} \text{ e } p'' = \sum_{h''=1}^{n''} x''_{1,h''} x''_{2,h''},$$

la loro differenza è pure un elemento di $\mathrm{P}(I_1, I_2)$, 'ché, detto $n = n' + n''$ e, per $h \in \{1, ..., n\}$, definiti gli elementi di $\{x_{1,h},\ x_{2,h}\}_{h \in \{1,...,n\}}$, ponendo

$$x_{1,h} = \begin{cases} x'_{1,h}, & \text{se } h \in \{1, ..., n'\} \\ \\ -x''_{1,h-n'}, & \text{se } h \in \{n'+1, ..., n'+n''\} \end{cases}$$

e, rispettivamente,

$$x_{2,h} = \begin{cases} x'_{2,h}, & \text{se } h \in \{1, ..., n'\} \\ \\ x''_{2,h-n'}, & \text{se } h \in \{n'+1, ..., n'+n''\}, \end{cases}$$

abbiamo

$$\begin{array}{rcl} p' - p'' & = & \sum_{h'=1}^{n'} x'_{1,h'} x'_{2,h'} - \sum_{h''=1}^{n''} x''_{1,h''} x''_{2,h''} \\ \\ & = & \sum_{h'=1}^{n'} x'_{1,h'} x'_{2,h'} + \sum_{h''=1}^{n''} (-x''_{1,h''}) x''_{2,h''} \\ \\ & = & \sum_{h=1}^{n} x_{1,h} x_{2,h}; \end{array}$$

quindi, $p' - p'' \in \mathrm{P}(I_1, I_2)$.

L'insieme $\mathrm{P}(I_1, I_2)$ verifica la proprietà di assorbimento a sinistra e, dunque, per la commutatività del prodotto, quella a destra. Infatti, dati comunque, $a \in A$ e $p \in \mathrm{P}(I_1, I_2)$, con

$$p = \sum_{h=1}^{n} x_{1,h} x_{2,h}$$

allora ap è pure un elemento di $\mathrm{P}(I_1, I_2)$, 'ché, per $h \in \{1, ..., n\}$, definiti gli elementi di $\{y_{1,h},\ y_{2,h}\}_{h \in \{1,...,n\}}$ e $\{z_{1,h},\ z_{2,h}\}_{h \in \{1,...,n\}}$, ponendo

$$y_{1,h} = a x_{1,h} \quad \text{e, rispettivamente,} \quad y_{2,h} = x_{2,h} \ (^9),$$

oppure

[9] Essendo un ideale sinistro di A, I_1 verifica la proprietà di assorbimento a sinistra; dunque, gli elementi di $\{y_{1,h}\}_{h \in \{1,...,n\}}$ son pure elementi di I_1.

$$z_{1,h} = x_{1,h} \text{ e, rispettivamente, } z_{2,h} = ax_{2,h} \text{ } (^{10}),$$

abbiamo

$$ap \;=\; a(\sum_{h=1}^{n} x_{1,h}x_{2,h}) \;=\; \begin{cases} \sum_{h=1}^{n}(ax_{1,h})x_{2,h} \\ \\ \text{oppure} \\ \\ \sum_{h=1}^{n} x_{1,h}(ax_{2,h}) \end{cases} = \begin{cases} \sum_{h=1}^{n} y_{1,h}y_{2,h} \\ \\ \text{oppure} \\ \\ \sum_{h=1}^{n} z_{1,h}z_{2,h}; \end{cases}$$

quindi, $ap \in \mathrm{P}(I_1, I_2)$.

L'insieme $\mathrm{P}(I_1, I_2)$ contiene I_1I_2. Infatti, essendo l'insieme di tutte le somme finite dei prodotti tra gli elementi di I_1 e quelli di I_2, a fortiori $\mathrm{P}(I_1, I_2)$ conterrà tutti i prodotti tra gli elementi di I_1 e quelli di I_2; dunque, l'enunciato $\mathrm{P}(I_1, I_2) \supseteq I_1I_2$ altri non è che è una traduzione della seguente inclusione

$$\left\{\sum_{h=1}^{n} x_{1,h}x_{2,h} \mid x_{1,h} \in I_1,\ x_{2,h} \in I_2,\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\right\} \supseteq \left\{\sum_{h=1}^{n} x_{1,h}x_{2,h} \mid x_{1,h} \in I_1,\ x_{2,h} \in I_2,\ n = 1\right\}$$

Ora, essendo un ideale e contenendo I_1I_2, l'insieme $\mathrm{P}(I_1, I_2)$ contiene $\langle I_1I_2\rangle$, per la definizione di quest'ultimo; ossia,

$$\mathrm{P}(I_1, I_2) \supseteq \langle I_1I_2\rangle.$$

L'insieme $\mathrm{P}(I_1, I_2)$ è contenuto in $\langle I_1I_2\rangle$. Infatti, essendo un ideale, $\langle I_1I_2\rangle$ contiene tutte le somme finite dei prodotti tra tutti i suoi elementi. Ora, poiché, da quanto visto sopra, $\mathrm{P}(I_1, I_2)$ è l'insieme di tutte le somme finite dei prodotti tra gli elementi di I_1 e quelli di I_2 ed essendo I_1I_2 contenuto in $\langle I_1I_2\rangle$, abbiamo

$$\mathrm{P}(I_1, I_2) \subseteq \langle I_1I_2\rangle,$$

essendo le somme finite dei prodotti tra gli elementi di I_1 e quelli di I_2 alcune tra le possibili somme finite di prodotti tra gli elementi di $\langle I_1I_2\rangle$.

Quindi $\mathrm{P}(I_1, I_2) = \langle I_1I_2\rangle$.

La verifica del fatto che entrambi I_1 e I_2 sono ideali dell'anello $I_1 + I_2$ e che $I_1 \cap I_2$ è un ideale di entrambi gli anelli I_1 e I_2 è una semplice conseguenza del fatto che I_1, I_2 e $I_1 \cap I_2$ sono ideali di A. Infatti, e I_1 e I_2 e $I_1 \cap I_2$, oltre ad esser gruppi additivi, assorbendo, da sinistra o da destra, qualsiasi elemento di A, assorbono, in particolare, quegli elementi di A che appartengono a $I_1 + I_2$, nel caso di I_1 e I_2, e appartengono a I_1 oppure a I_2, nel caso di $I_1 \cap I_2$.

Gli omomorfismi appartenenti a $\{\alpha_{(k_1,k_2)}\}_{(k_1,k_2)\in\{1,2\}^2}$ con $k_1 \neq k_2$ son suriettivi. Infatti, presi comunque $x_1 \in I_1$ e $x_2 \in I_2$ e considerati $(x_1 + x_2) + I_1 \in (I_1 + I_2)/I_1$ e $(x_1 + x_2) + I_2 \in (I_1 + I_2)/I_2$ elementi del codominio di $\alpha_{(2,1)}$ e, rispettivamente, $\alpha_{(1,2)}$, abbiamo

[10] Essendo un ideale sinistro di A, I_2 verifica la proprietà di assorbimento a sinistra; dunque, gli elementi di $\{z_{2,h}\}_{h\in\{1,\ldots,n\}}$ son pure elementi di I_2.

$$(x_1 + x_2) + I_1 \;=\; x_2 + I_1 \;=\; (0 + x_2) + I_1 \;=\; \alpha_{(2,1)}(x_2)$$

e, rispettivamente,

$$(x_1 + x_2) + I_2 \;=\; x_1 + I_2 \;=\; (x_1 + 0) + I_2 \;=\; \alpha_{(1,2)}(x_1).$$

Dunque, $(x_1+x_2)+I_1$ e $(x_1+x_2)+I_2$ sono immagini, via $\alpha_{(2,1)}$ e, rispettivamente, $\alpha_{(1,2)}$ degli elementi $x_2 \in I_2$ e, rispettivamente, $x_1 \in I_1$.

Quindi, entrambi $\alpha_{(2,1)}$ e $\alpha_{(1,2)}$ son suriettivi.

Il nucleo di entrambi $\alpha_{(2,1)}$ e $\alpha_{(1,2)}$ è uguale a $I_1 \cap I_2$; ossia, che $\ker \alpha_{(2,1)} = I_1 \cap I_2$ e, rispettivamente, $\ker \alpha_{(1,2)} = I_1 \cap I_2$. Infatti,

$$\begin{aligned}
\ker \alpha_{(2,1)} &= \{x_2 \in I_2 \mid x_2 + I_1 = I_1\} \\
&= \{x_2 \in I_2 \mid x_2 \in I_1\} \\
&= I_1 \cap I_2
\end{aligned}$$

e, rispettivamente,

$$\begin{aligned}
\ker \alpha_{(1,2)} &= \{x_1 \in I_1 \mid x_1 + I_2 = I_2\} \\
&= \{x_1 \in I_1 \mid x_1 \in I_2\} \\
&= I_1 \cap I_2.
\end{aligned}$$

Quindi, per il teorema fondamentale di omomorfismo, abbiamo

$$(I_1 + I_2)/I_1 \;\approx\; I_2/\ker \alpha_{(2,1)} \;=\; I_2/(I_1 \cap I_2)$$

e, rispettivamente,

$$(I_1 + I_2)/I_2 \;\approx\; I_1/\ker \alpha_{(1,2)} \;=\; I_1/(I_1 \cap I_2).$$

Esercizio 3. Sia $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni reali di una variabile reale ([11]).

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $\mathrm{I}_x(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni che si annullano nel punto $x \in \mathbb{R}$.

Si mostri che, dato $x \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathrm{I}_x(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è un ideale massimale di $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e, dati comunque n punti $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ tra loro a due a due distinti, sia $\mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni che si annullano simultaneamente in $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ ([12]).

Si mostri che, dati $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è un ideale di $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ che non è un ideale primo.

Sia $\mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'insieme di quelle funzioni reali di una variabile reale che son funzioni polinomiali.

Si mostri che, se dotato delle abituali operazioni di somma e prodotto tra funzioni, $\mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è un anello commutativo unitario, che, inoltre, è sottoanello di $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Si mostri che, dato $x \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathrm{I}_x(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è un ideale massimale di $\mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Si mostri che, dati $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è un ideale di $\mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ che non è un ideale primo.

Si mostri che, dati $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $x \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathrm{I}^n_x(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è un ideale di $\mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ che non è un ideale primo ([13]).

Soluzione. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $\mathrm{val}_x : \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{val}_x : & \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f(x) \end{array} \qquad ({}^{14})$$

Allora val_x è un omomorfismo di anelli (commutativi unitarî); infatti,

$$\begin{aligned} \mathrm{val}_x(f_1 + f_2) &= (f_1 + f_2)(x) \\ &= f_1(x) + f_2(x) \\ &= \mathrm{val}_x(f_1) + \mathrm{val}_x(f_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathrm{val}_x(f_1 \cdot f_2) &= (f_1 \cdot f_2)(x) \\ &= f_1(x) \cdot f_2(x) \\ &= \mathrm{val}_x(f_1) \cdot \mathrm{val}_x(f_2). \end{aligned}$$

Inoltre val_x è suriettiva, 'ché, dato comunque $a \in \mathbb{R}$, esiste almeno una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di cui esso è immagine secondo val_x; ad esempio, a è immagine via val_x dell'applicazione costante $cost_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che a ogni $y \in \mathbb{R}$ associa $cost_a(y) = a \in \mathbb{R}$.

[11] Secondo quanto visto durante l'esercitazione VIII, l'insieme $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, allorquando è dotato delle abituali operazioni di somma e prodotto tra funzioni, è un anello commutativo unitario.

[12] È possibile definire l'insieme $\mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ anche rimuovendo l'ipotesi che i punti $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ siano a due a due distinti; spiegherò come durante l'esercitazione IX.

[13] Siano A un anello commutativo unitario e $I \subseteq A$ un ideale di A. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisca I^n ponendo $I^0 = A$, $I^{n+1} = I^n \cdot I$. Si confronti con quanto scritto nella nota 4.

Dato $x \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathrm{I}_x(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è un ideale massimale di $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Di fatto, questa è una conseguenza della seguente osservazione

$$\mathrm{I}_x(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ = \ \{f \in \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(x)=0\} \ = \ \ker \mathrm{val}_x,$$

del teorema di omomorfismo tra anelli, grazie al quale possiamo affermare che

$$\star_x \quad \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ker \mathrm{val}_x = \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})/\mathrm{I}_x(\mathbb{R},\mathbb{R}) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathbb{R},$$

del fatto che un ideale I di un anello A è massimale se e solo A/I è un campo e del fatto che $\mathbb{R}$ è un campo; vedasi $\star_x$.

Dati $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è un ideale di $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ che non è un ideale primo. Che $\mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sia un ideale di $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è una conseguenza della seguente osservazione. Per ogni $h \in \{1, ..., n\}$ consideriamo una copia $\mathbb{R}_h$ del campo $\mathbb{R}$, costruiamo l'anello prodotto (commutativo unitario) $\mathbb{R}_1 \times ... \times \mathbb{R}_n$ e definiamo l'applicazione $\mathrm{val}_{x_1,...,x_n} : \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_1 \times ... \times \mathbb{R}_n$ ponendo

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{val}_{x_1,...,x_n}: & \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_1 \times ... \times \mathbb{R}_n \\ & f & \longmapsto & (f(x_1), ..., f(x_n)) \end{array}$$

Allora $\mathrm{val}_{x_1,...,x_n}$ è un omomorfismo di anelli (commutativi unitarî); infatti,

$$\begin{aligned} \mathrm{val}_{x_1,...,x_n}(f_1+f_2) &= ((f_1+f_2)(x_1), ..., (f_1+f_2)(x_n)) \\ &= (f_1(x_1)+f_2(x_1), ..., f_1(x_n)+f_2(x_n)) \\ &= (f_1(x_1), ..., f_1(x_n)) + (f_2(x_1), ..., f_2(x_n)) \\ &= \mathrm{val}_{x_1,...,x_n}(f_1) + \mathrm{val}_{x_1,...,x_n}(f_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathrm{val}_{x_1,...,x_n}(f_1 \cdot f_2) &= ((f_1 \cdot f_2)(x_1), ..., (f_1 \cdot f_2)(x_n)) \\ &= (f_1(x_1) \cdot f_2(x_1), ..., f_1(x_n) \cdot f_2(x_n)) \\ &= (f_1(x_1), ..., f_1(x_n)) \cdot (f_2(x_1), ..., f_2(x_n)) \\ &= \mathrm{val}_{x_1,...,x_n}(f_1) \cdot \mathrm{val}_{x_1,...,x_n}(f_2). \end{aligned}$$

Inoltre, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R},\mathbb{R}) &= \{f \in \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(x_1)=0, ..., f(x_n)=0\} \\ &\overset{\sim}{\leftrightarrow} \{f \in \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid (f(x_1), ..., f(x_n)) = (0, ..., 0)\} \\ &= \ker \mathrm{val}_{x_1,...,x_n}, \end{aligned}$$

così che $\mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è un ideale di $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Inoltre, per il teorema di omomorfismo tra anelli, abbiamo

$$\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ker \mathrm{val}_{x_1,...,x_n} = \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})/\mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathbb{R}_1 \times ... \times \mathbb{R}_n,$$

così che, non essendo $\mathbb{R}_1 \times ... \times \mathbb{R}_n$ un dominio d'integrità ([15]), l'ideale $\mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ non è primo ([16]).

L'insieme $\mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è ovviamente un sottoanello di $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Dato $x \in \mathbb{R}$, che l'insieme $\mathrm{I}_x(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sia un ideale massimale di $\mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ può esser provato come sopra mostrato nel caso di funzioni qualsiasi.

Dati $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, che l'insieme $\mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}$ sia un ideale di $\mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ che non è un ideale primo può esser provato come sopra mostrato nel caso di funzioni qualsiasi.

Dati $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $x \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathrm{I}^n_x(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è un ideale di $\mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Infatti, detta

$$\begin{array}{rccl} \beta : & \mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ & p & \longmapsto & \beta(p) = \beta((y \mapsto p(y))) = p(\mathrm{X}) \end{array}$$

la biezione tra l'insieme delle funzioni reali di variabile reale che son polinomiali e l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$, abbiamo

$$\mathrm{I}^n_x(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{p \in \mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \beta(p) = (\mathrm{X}-x)^n \tilde{p}(\mathrm{X}),\ \text{con } \tilde{p}(\mathrm{X}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\}$$

Quindi, $\mathrm{I}^n_x(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è evidentemente un ideale di $\mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 'ché è un sottogruppo additivo e verifica la proprietà di assorbimento a sinistra e, per la commutatività del prodotto, quella a destra ([17])

L'ideale $\mathrm{I}^n_x(\mathbb{R},\mathbb{R})$ non è primo. Per mostrare questo fatto, basta esibire un esempio di un elemento appartenente $\mathrm{I}^n_x(\mathbb{R},\mathbb{R})$ che può esser scritto come prodotto di due elementi di $\mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ che siano entrambi non appartenenti a $\mathrm{I}^n_x(\mathbb{R},\mathbb{R})$. A tal fine, esibiamo il seguente esempio. Sia q la funzione polinomiale definita da

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto q(y) = y - x \in \mathbb{R}$$

e si considerino gli elementi q e q^{n-1} di $\mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ([18]) ([19]); allora, benché il loro prodotto appartenga a $\mathrm{I}^n_x(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ([20]), nessuno tra q e q^{n-1} appartiene a $\mathrm{I}^n_x(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

---

[15] L'anello $\mathbb{R}_1 \times ... \times \mathbb{R}_n$ non è un dominio d'integrità. Per mostrare questo fatto, basta esibire un esempio di due elementi entrambi non nulli il cui prodotto è nullo. A tal fine, consideriamo gli elementi $(1,0,...,0)$, $(0,1,...,0)$ di $\mathbb{R}_1 \times ... \times \mathbb{R}_n$; ora, benché entrambi $(1,0,...,0)$ e $(0,1,...,0)$ sian diversi da $(0,0,...,0)$, risulta $(1,0,...,0) \cdot (0,1,...,0) = (1 \cdot 0, 0 \cdot 1, ..., 0 \cdot 0) = (0,0,...,0)$.

[16] Ricordiamo che un ideale I di un anello A è primo se e solo A/I è un dominio d'integrità.

[17] Per verificare questi fatti, lavorate avendo l'accortezza di "mettere in evidenza" i fattori $(\mathrm{X}-x)^n$ ogni qual volta lo riterrete opportuno.

[18] Ricordiamo che il naturale n non è minore di 1; ossia, $n \geq 2$.

[19] Una descrizione più esplicita delle funzioni q e q^{n-1} è la seguente: $\mathbb{R} \ni y \mapsto q(y) = y - x \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \ni y \mapsto q^{n-1}(y) = (y-x)^{n-1} \in \mathbb{R}$.

[20] Il prodotto di q e q^{n-1} è q^n; ossia, è la funzione $\mathbb{R} \ni y \mapsto q^n(y) = (y-x)^n \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Si considerino i seguenti polinomî a coefficienti interi

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{T(X)} & = & \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} + 2 \\ \mathrm{R(X)} & = & 10\mathrm{X}^2 - 2 \\ \mathrm{A(X)} & = & \mathrm{X}^4 - 49 \end{array}$$

Si dica, se gli anelli $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{T(X)} \rangle$, $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{R(X)} \rangle$ e $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{A(X)} \rangle$ sono campi.

Si dica, se gli anelli $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{T(X)} \rangle$, $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{R(X)} \rangle$ e $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{A(X)} \rangle$ sono dominî d'integrità.

Soluzione. Ricordiamo che, dato un polinomio $\mathrm{E[X]} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, le seguenti affermazioni sono equivalenti

- l'anello quoziente $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{E(X)} \rangle$ è un dominio di integrità;
- l'anello quoziente $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{E(X)} \rangle$ è un campo;
- il polinomio $\mathrm{E[X]} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$.

Ricordiamo, inoltre, che dato un polinomio $\mathrm{S[X]} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, le seguenti affermazioni sono equivalenti

- l'anello quoziente $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{S(X)} \rangle$ è un dominio di integrità;
- il polinomio $\mathrm{S[X]} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$.

Quindi, rispondere alle domande poste nel testo dell'esercizio è equivalente a studiare la riducibilità in $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ e in $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ dei polinomi T(X), R(X) e A(X).

T(X)

Il polinomio T(X) è irriducibile in $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ e, quindi, per il teorema di Gauß, in $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$. Al fine di provare la suddetta irriducibilità, basta osservare che il primo $2 \in \mathbb{Z}$ verifica tutte le condizioni del criterio di Eisenstein relative a T[X].

Quindi, $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{T(X)} \rangle$ è un campo e $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{T(X)} \rangle$ è un dominio di integrità.

R[X]

Il polinomio R(X) è irriducibile in $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$. Al fine di provare la suddetta irriducibilità, basta osservare che R(X) non ammette radici razionali ([21]).

D'altra parte, il polinomio R(X) è riducibile in $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, 'ché, in $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, la fattorizzazione $10\mathrm{X}^2 - 2 = 2(5\mathrm{X}^2 - 1)$ è non banale.

Quindi, $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{R(X)} \rangle$ è campo e $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{R(X)} \rangle$ non è un dominio di integrità.

A[X]

Il polinomio A(X) è riducibile in $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ e, quindi, per il teorema di Gauß, in $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$. Al fine di provare la suddetta riducibilità, basta osservare che, essendo $49 = 7^2$ è possibile scrivere $\mathrm{X}^4 - 49 = (\mathrm{X}^2 - 7)(\mathrm{X}^2 + 7)$.

Quindi, $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{A(X)} \rangle$ non è un campo e $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{A(X)} \rangle$ non è un dominio di integrità.

[21] Si ricordi che per un polinomio di grado 2 o 3 a coefficienti in un campo κ la riducibilità in $\kappa[\mathrm{X}]$ è equivalente all'esistenza di almeno una radice in κ.

Esercizio 5. Si consideri il seguente polinomio a coefficienti interi

$$\mathrm{U}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - 1$$

Si dia una descrizione dell'anello $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle$.

Si dica, se $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle$ è un campo.

Si dica, se $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle$ è un dominio d'integrità.

Si determini l'insieme degli ideali di $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle$ ([22]).

Soluzione. Sia $\pi_{\mathrm{U}(\mathrm{X})} : \mathbb{Q}[\mathrm{X}] \to \mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle$ la proiezione canonica; nel seguito, scriveremo $\mathrm{Y} = \pi_{\mathrm{U}(\mathrm{X})}(\mathrm{X})$.

L'anello quoziente $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle$ ammette la seguente descrizione

$$\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle = \big\{a_0 + a_1\mathrm{Y} \mid \text{ per ogni } a_0, a_1 \in \mathbb{Q},\ \mathrm{Y}^2 = 1\big\}$$

L'anello quoziente $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle$ non è un campo, né un dominio d'integrità, 'ché il polinomio $\mathrm{U}(\mathrm{X}) \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ è riducibile in $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$; esso ammette, in $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, la fattorizzazione seguente

$$\mathrm{U}(\mathrm{X}) \ = \ \mathrm{X}^2 - 1 \ = \ (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1) \ ([23]).$$

L'insieme $\mathrm{Ideali}_{\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle}$ degli ideali dell'anello quoziente $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathrm{Ideali}_{\mathbb{Q}[\mathrm{X}]}(\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle)$ degli ideali dell'anello $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ che contengon l'ideale $\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle$; una biezione è determinata, ad esempio, dall'applicazione $\pi_{\mathrm{U}(\mathrm{X})}$, così che

$$\pi^{-1}_{\mathrm{U}(\mathrm{X})} : \mathrm{Ideali}_{\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ideali}_{\mathbb{Q}[\mathrm{X}]}(\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle)$$

e

$$\pi_{\mathrm{U}(\mathrm{X})} : \mathrm{Ideali}_{\mathbb{Q}[\mathrm{X}]}(\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ideali}_{\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle}$$

Ricordiamo, ora, che ogni ideale I di $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ è principale; ossia, per ogni $I \in \mathrm{Ideali}_{\mathbb{Q}[\mathrm{X}]}$ esiste un elemento $\mathrm{P}_I(\mathrm{X}) \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ tale che $I = \langle \mathrm{P}_I(\mathrm{X})\rangle$; inoltre, ogni generatore è univocamente determinato a meno della relazione "essere associato", così che, in particolare, per ogni $I \in \mathrm{Ideali}_{\mathbb{Q}[\mathrm{X}]}$ esiste un unico generatore di I che sia anche monico.

Ricordiamo, inoltre, che dati $I_1, I_2 \in \mathrm{Ideali}_{\mathbb{Q}[\mathrm{X}]}$, l'ideale I_1 contiene l'ideale I_2 se e solo se $\mathrm{P}_{I_1}(\mathrm{X})$ divide $\mathrm{P}_{I_2}(\mathrm{X})$; ossia, $I_1 \supseteq I_2$ se e solo se $\mathrm{P}_{I_1}(\mathrm{X}) \mid \mathrm{P}_{I_2}(\mathrm{X})$.

Quindi, un ideale I di $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ contiene $\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle \in \mathrm{Ideali}_{\mathbb{Q}[\mathrm{X}]}$ se e solo se $\mathrm{P}_I(\mathrm{X}) \mid \mathrm{U}(\mathrm{X})$.

Dunque, il problema della determinazione dell'insieme $\mathrm{Ideali}_{\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U}(\mathrm{X})\rangle}$ è equivalente al problema della determinazione dei polinomî (monici) che dividono $\mathrm{U}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - 1$.

[22] Si ricordi che, se κ è un campo, allora $\kappa[\mathrm{X}]$ è un anello a ideali principali. Si ricordi, inoltre, che, dati $\mathrm{N}(\mathrm{X}), \mathrm{O}(\mathrm{X}) \in \kappa[\mathrm{X}]$, allora $\langle \mathrm{N}(\mathrm{X})\rangle \supseteq \langle \mathrm{O}(\mathrm{X})\rangle$ se e solo se $\mathrm{N}(\mathrm{X}) \mid \mathrm{O}(\mathrm{X})$.

[23] Si confronti con quanto scritto a proposito dell'esercizio 4.

Ora, gli unici divisori monici di $\mathrm{U(X)}$ sono i polinomî $\mathrm{V(X)} = \mathrm{X}-1$ e $\mathrm{A(X)} = \mathrm{X}+1$; infatti,

$$\mathrm{U(X)} \;=\; \mathrm{V(X)A(X)}$$

Quindi, da un lato, abbiamo

$$\mathrm{Ideali}_{\mathbb{Q}[\mathrm{X}]}(\langle \mathrm{U(X)}\rangle) \quad = \quad \{\ \langle \mathrm{V(X)}\rangle,\ \langle \mathrm{A(X)}\rangle\ \}$$

e, dunque, da un altro lato, otteniamo, finalmente, il risultato desiderato; ossia,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ideali}_{\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U(X)}\rangle} \quad &= \quad \Big\{\ \langle \pi_{\mathrm{U(X)}}(\mathrm{V(X)})\rangle,\ \langle \pi_{\mathrm{U(X)}}(\mathrm{A(X)})\rangle\ \Big\} \\ &= \quad \{\ \langle \mathrm{P(Y)}\rangle,\ \langle \mathrm{M(Y)}\rangle\ \}\,,\end{aligned}$$

con $\mathrm{P(Y)} = \pi_{\mathrm{U(X)}}(\mathrm{V(X)}) = \mathrm{Y} - 1$ e $\mathrm{M(Y)} = \pi_{\mathrm{U(X)}}(\mathrm{A(X)}) = \mathrm{Y} + 1$.

A titolo di esempio, mostriamo che $\langle \mathrm{P(Y)}\rangle$ e $\langle \mathrm{M(Y)}\rangle$ verificano la proprietà di assorbimento a sinistra e, dunque, per la commutatività del prodotto, quella a destra. Dati comunque $a_0 + a_1\mathrm{Y} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U(X)}\rangle$, e $q \in \mathbb{Q}$, abbiamo

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1\mathrm{Y})(q(\mathrm{P(Y)})) \quad &= \quad q(a_0 + a_1\mathrm{Y})(\mathrm{Y} - 1) \\ &= \quad q(a_0\mathrm{Y} - a_0 + a_1\mathrm{Y}^2 - a_1\mathrm{Y}) \\ \text{ricordando che } \mathrm{Y}^2 = 1 \quad &= \quad q(a_0\mathrm{Y} - a_0 + a_1 - a_1\mathrm{Y}) \\ &= \quad q(a_0 - a_1)(\mathrm{Y} - 1) \\ &= \quad q(a_0 + a_1)(\mathrm{P(Y)})\end{aligned}$$

e, rispettivamente,

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1\mathrm{Y})(q(\mathrm{M(Y)})) \quad &= \quad q(a_0 + a_1\mathrm{Y})(\mathrm{Y} + 1) \\ &= \quad q(a_0\mathrm{Y} + a_0 + a_1\mathrm{Y}^2 + a_1\mathrm{Y}) \\ \text{ricordando che } \mathrm{Y}^2 = 1 \quad &= \quad q(a_0\mathrm{Y} + a_0 + a_1 + a_1\mathrm{Y}) \\ &= \quad q(a_0 + a_1)(\mathrm{Y} - 1) \\ &= \quad q(a_0 + a_1)(\mathrm{M(Y)})\end{aligned}$$

Esercizio 6. Si consideri un insieme contenente un solo elemento; ossia, detto x tale elemento, si consideri l'insieme $\{x\}$. Si determinino un insieme Y_x e una relazione di equivalenza $\tau_x \subseteq Y^2$ su Y tali che $\{x\} = Y_x/\tau_x$.

Si consideri un insieme contenente due elementi; ossia, detti x_1, x_2 tali elementi, si consideri l'insieme $\{x_1, x_2\}$. Si determinino un insieme Y_{x_1,x_2} e una relazione di equivalenza $\tau_{x_1,x_2} \subseteq Y^2_{x_1,x_2}$ su Y_{x_1,x_2} tali che $\{x_1, x_2\} = Y/\tau_{x_1,x_2}$ ([24]).

Si consideri un qualsiasi insieme non vuoto X. Si determinino un insieme Y_X e una relazione di equivalenza $\tau_X \subseteq Y_X^2$ su Y_X tali che $X = Y/\tau_X$ ([25]).

Avete appena mostrato che, a patto di avere una assai feconda fantasia o una sensibilità estremamente raffinata, è sempre possibile descrivere un qualsivoglia insieme non vuoto come quoziente di un qualche altro insieme, anch'esso non vuoto.

Soluzione. Sia Y_x l'insieme definito da $Y_x = \{\mathrm{F}, \mathrm{A}, \mathrm{L}, \mathrm{C}, \mathrm{O}\}$ e sia $\tau_x = Y_x \times Y_x$ la relazione totale su Y_x. La relazione totale τ_x individua un'unica classe di equivalenza; equivalentemente, la partizione associata a τ_x - ossia, l'insieme quoziente Y_x/τ_x - contiene un solo elemento

$$Y_x/\tau_x = \{\ \{\mathrm{F}, \mathrm{A}, \mathrm{L}, \mathrm{C}, \mathrm{O}\}\ \}$$

Quindi, essendo equipotenti, gli insiemi Y_x/τ_x e $\{x\}$ son tra loro in corrispondenza biunivoca; ossia

$$Y_x/\tau_x \ \overset{\sim}{\longleftrightarrow}\ \{x\}$$

Siano Y_{x_1} e Y_{x_2} gli insiemi definiti da $Y_{x_1} = \{\mathrm{F}_{x_1}, \mathrm{A}_{x_1}, \mathrm{L}_{x_1}, \mathrm{C}_{x_1}, \mathrm{O}_{x_1}\}$ e, rispettivamente, $Y_{x_2} = \{\mathrm{F}_{x_2}, \mathrm{A}_{x_2}, \mathrm{L}_{x_2}, \mathrm{C}_{x_2}, \mathrm{O}_{x_2}\}$; siano $\tau_{x_1} = Y_{x_1} \times Y_{x_1}$ e $\tau_{x_2} = Y_{x_2} \times Y_{x_2}$ le relazioni totali su Y_{x_1} e, rispettivamente, Y_{x_2}.

Sia Y_{x_1,x_2} l'insieme definito da $Y_{x_1,x_2} = Y_{x_1} \dot\cup Y_{x_2}$; ossia

$$Y_{x_1,x_2} = \{\mathrm{F}_{x_1}, \mathrm{A}_{x_1}, \mathrm{L}_{x_1}, \mathrm{C}_{x_1}, \mathrm{O}_{x_1}, \mathrm{F}_{x_2}, \mathrm{A}_{x_2}, \mathrm{L}_{x_2}, \mathrm{C}_{x_2}, \mathrm{O}_{x_2}\}.$$

Sia, inoltre, $\tau_{x_1,x_2} \subseteq Y_{x_1,x_2} \times Y_{x_1,x_2}$ la relazione di equivalenza su Y_{x_1,x_2} definita da

$$\tau_{x_1,x_2} = \iota_{x_1}(\tau_{x_1}) \dot\cup \iota_{x_2}(\tau_{x_2}),$$

essendo $\iota_{x_1} : Y^2_{x_1} \hookrightarrow Y^2_{x_1,x_2}$ e $\iota_{x_2} : Y^2_{x_2} \hookrightarrow Y^2_{x_1,x_2}$ le inclusioni naturali.

Allora τ_{x_1,x_2} è associata alla partizione $\{\{\mathrm{F}_{x_k}, \mathrm{A}_{x_k}, \mathrm{L}_{x_k}, \mathrm{C}_{x_1k}, \mathrm{O}_{x_k}\}\}_{k\in\{1,2\}}$ di Y_{x_1,x_2}; ossia,

$$Y_{x_1,x_2}/\tau_{x_1,x_2} \ = \ \{\ \{\mathrm{F}_{x_k}, \mathrm{A}_{x_k}, \mathrm{L}_{x_k}, \mathrm{C}_{x_1k}, \mathrm{O}_{x_k}\}\ \}_{k\in\{1,2\}}$$

[24]Sugg.: si scriva $\{x_1, x_2\} = \{x_1\}\dot\cup\{x_2\}$; per ogni $k \in \{1, 2\}$, si determinino, come nella prima parte dell'esercizio, un insieme Y_{x_k} e una relazione di equivalenza $\tau_{x_k} \subseteq Y^2_{x_k}$ su $Y^2_{x_k}$ tali che $\{x_k\} = Y_{x_k}/\tau_{x_k}$; si defiscano Y_{x_1,x_2} e τ_{x_1,x_2} ponendo $Y_{x_1,x_2} = Y_{x_1}\dot\cup Y_{x_2}$ e $\tau_{x_1,x_2} = \iota_{x_1}(\tau_{x_1})\dot\cup\iota_{x_2}(\tau_{x_2})$, per ogni $k \in \{1, 2\}$ essendo $\iota_{x_k} : Y^2_{x_k} \hookrightarrow Y^2_{x_1,x_2}$ l'inclusione naturale.

[25]Sugg.: si scriva $X = \dot\bigcup_{x\in X}\{x\}$; per ogni $x \in X$, si determinino, come nella prima parte dell'esercizio, un insieme Y_x e una relazione di equivalenza $\tau_x \subseteq Y_x^2$ tali che $\{x\} = Y_x/\tau_x$; si defiscano Y_X e τ_X ponendo $Y_X = \dot\bigcup_{x\in X} Y_x$ e $\tau_X = \dot\bigcup_{x\in X}\iota_x(\tau_x)$, per ogni $x \in X$ essendo $\iota_x : Y_x^2 \hookrightarrow Y_X^2$ l'inclusione naturale.

Dunque, la relazione τ_{x_1,x_2} individua due classi di equivalenza; equivalentemente, la partizione associata a τ_{x_1,x_2} - ossia, l'insieme quoziente $Y_{x_1,x_2}/\tau_{x_1,x_2}$ - contiene due elementi

Quindi, essendo equipotenti, gli insiemi $Y_{x_1,x_2}/\tau_{x_1,x_2}$ e $\{x_1, x_2\}$ son tra loro in corrispondenza biunivoca; ossia

$$Y_{x_1,x_2}/\tau_{x_1,x_2} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \{x_1, x_2\}$$

Per ogni $x \in X$ sia Y_x l'insieme definito da $Y_x = \{\mathrm{F}_x, \mathrm{A}_x, \mathrm{L}_x, \mathrm{C}_x, \mathrm{O}_x\}$ e sia $\tau_x = Y_x \times Y_x$ la relazione totali su Y_x.

Sia Y_X l'insieme definito da $Y_X = \dot{\bigcup}_{x\in X} Y_x$; ossia

$$Y_X = \dot{\bigcup}_{x\in X} \{\mathrm{F}_x, \mathrm{A}_x, \mathrm{L}_x, \mathrm{C}_x, \mathrm{O}_x\}$$

Sia, inoltre, $\tau_X \subseteq Y_X \times Y_X$ la relazione di equivalenza su Y_X definita da

$$\tau_X = \dot{\bigcup}_{x\in X} \iota_x(\tau_x),$$

per ogni $x \in X$ essendo $\iota_x : Y_x^2 \hookrightarrow Y_X^2$ l'inclusione naturale.

Allora τ_X è associata alla partizione $\{\{\mathrm{F}_x, \mathrm{A}_x, \mathrm{L}_x, \mathrm{C}_x, \mathrm{O}_x\}\}_{x\in X}$ di Y_X; ossia,

$$Y_X/\tau_X \ = \ \{ \ \{\mathrm{F}_x, \mathrm{A}_x, \mathrm{L}_x, \mathrm{C}_x, \mathrm{O}_x\} \ \}_{x\in X}$$

Dunque, la cardinalità dell'insieme delle classi di equivalenza individuate dalla relazione τ_X è pari a $|X|$; equivalentemente, la partizione associata a τ_X - ossia, l'insieme quoziente Y_X/τ_X - ha la stessa potenza dell'insieme X

Quindi, essendo equipotenti, gli insiemi Y_X/τ_X e X son tra loro in corrispondenza biunivoca; ossia

$$Y_X/\tau_X \overset{\sim}{\longleftrightarrow} X$$

Tengo molto a farVi osservare che la scelta degli inisiemi $\{Y_x\}_{x\in X}$ è completamente arbitraria; così, in particolare, non è necessario che essi sian tra loro equipotenti; personalmente, ho optato per insiemi tra loro equipotenti puramente per semplificare la redazione della soluzione da me trovata... ...per esempio, nel caso $\{x_1, x_2\}$, avrei potuto scegliere $Y_{x_1} = \{\mathrm{I}, \mathrm{C}, \mathrm{N}, \mathrm{I}, \mathrm{S}\}$ e $Y_{x_2} = \{\mathrm{A}_1, \mathrm{Q}, \mathrm{V}, \mathrm{A}_2\}$; tale scelta è completamente lecita e, se l'avessi compiuta, allora avrei avuto $|Y_{x_1}| = 5$ e $|Y_{x_2}| = 4$.. ...d'altra parte, mi sarebbe costato troppa fatica immaginare una generalizzazione di questo esempio... ...così, ho preferito far riprodurre i falchi...

...e, ora, un'ultima osservazione... ...la frase "è sempre possibile descrivere un qualsivoglia insieme non vuoto come quoziente di un qualche altro insieme, anch'esso non vuoto" può esser riscritta in questa forma:

Dato comunque un insieme $X \neq \emptyset$, l'equazione

$$\mathrm{Y}/\rho = X$$

con Y insieme e ρ relazione di equivalenza su Y, ammette sempre una soluzione; in realtà, ne ammette infinite.

P.S.
Canario di J.H. Kapsberger
http://www.youtube.com/watch?v=ZtDyHrGdp6Efeature=related