ALGEBRA 1 PB-Z
IX. 18 V 2012

Esercizio 1. Sia A un anello e siano $I_1 \subseteq A$ e $I_2 \subseteq A$ ideali sinistri di A.

Si mostri che l'insieme $I_1 + I_2$, definito da $I_1 + I_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in I_1, x_2 \in I_2\}$, è un ideale sinistro di A.

Si mostri che gli enunciati ottenuti sostituendo all* parol* "sinistr* " l* parol* "destr* " o l* parol* "bilater* " sono pure veri.

Esercizio 2. Sia A un anello commutativo unitario e siano $I_1 \subseteq A$ e $I_2 \subseteq A$ ideali di A.

Si mostri che entrambi $I_1 \cap I_2$ e $I_1 + I_2$ sono ideali di A e che, detto $\langle I_1 I_2 \rangle$ l'ideale generato da $I_1 I_2$, risulta

$$\langle I_1 I_2 \rangle = \left\{ \sum_{h=1}^{n} x_{1,h} x_{2,h} \mid x_{1,h} \in I_1,\ x_{2,h} \in I_2,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$ ([1]) ([2]) ([3]) ([4]).

Si mostri che entrambi I_1 e I_2 sono ideali dell'anello (non unitario) $I_1 + I_2$ e che $I_1 \cap I_2$ è un ideale di entrambi gli anelli (anch'essi non unitarî) I_1 e I_2.

Per $k \in \{1,2\}$, siano $\iota_k : I_k \hookrightarrow I_1 + I_2$ e $\pi_k : I_1 + I_2 \to (I_1 + I_2)/I_k$ gli omomorfismi naturali. Data una coppia $(k_1, k_2) \in \{1,2\}^2$, con $k_1 \neq k_2$, si definisca $\alpha_{(k_1,k_2)}$ ponendo $\alpha_{(k_1,k_2)} = \pi_{k_2} \circ \iota_{k_1}$; naturalmente, $\alpha_{(k_1,k_2)} : I_{k_1} \to (I_1 + I_2)/I_{k_2}$.

Si mostri che, per ogni $(k_1, k_2) \in \{1,2\}^2$, $k_1 \neq k_2$, l'omomorfismo $\alpha_{(k_1,k_2)}$ è suriettivo e che $\ker \alpha_{(k_1,k_2)} = I_1 \cap I_2$. Se ne deduca che, per ogni $(k_1, k_2) \in \{1,2\}^2$, con $k_1 \neq k_2$, si ha $I_{k_1}/(I_1 \cap I_2) \approx (I_1 + I_2)/I_{k_2}$.

Esercizio 3. Sia $\mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni reali di una variabile reale ([5]).

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $\mathrm{I}_x(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni che si annullano nel punto $x \in \mathbb{R}$.

Si mostri che, dato $x \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathrm{I}_x(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è un ideale massimale di $\mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

---

[1] Per la definizione di $I_1 + I_2$ si veda il testo dell'esercizio 1.

[2] Per definizione, $\langle I_1 I_2 \rangle = \bigcap \{I \mid I \subseteq A,\ I \text{ ideale},\ I_1 I_2 \subseteq I\}$. Naturalmente, $I_1 I_2 \subseteq \langle I_1 I_2 \rangle$.

[3] Sugg.: dopo aver mostrato che è un ideale, si provi che il membro di destra dell'uguaglianza, oltre a esser contenuto in $\langle I_1 I_2 \rangle$, contiene $I_1 I_2$ e, quindi, $\langle I_1 I_2 \rangle$, perché ideale.

[4] Si osservi che, se $I_1 = I_2$, allora $\langle I_1 I_2 \rangle = I_1 I_2 = \{x_1 x_2 | x_1 \in I_1, x_2 \in I_2\}$. Scrivendo $I = I_1$, $I = I_2$, abbiamo, dunque, $\langle I^2 \rangle = I^2 = \{x_1 x_2 | x_1, x_2 \in I\}$.

[5] Secondo quanto visto durante l'esercitazione VIII, l'insieme $\mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, allorquando è dotato delle abituali operazioni di somma e prodotto tra funzioni, è un anello commutativo unitario.

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e, dati comunque n punti $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ tra loro a due a due distinti, sia $\mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni che si annullano simultaneamente in $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ ([6]).

Si mostri che, dati $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è un ideale di $\mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ che non è un ideale primo.

Sia $\mathrm{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'insieme di quelle funzioni reali di una variabile reale che son funzioni polinomiali.

Si mostri che, se dotato delle abituali operazioni di somma e prodotto tra funzioni, $\mathrm{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è un anello commutativo unitario, che, inoltre, è sottoanello di $\mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Si mostri che, dato $x \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathrm{I}_x(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathrm{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è un ideale massimale di $\mathrm{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Si mostri che, dati $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathrm{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è un ideale di $\mathrm{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ che non è un ideale primo.

Si mostri che, dati $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $x \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathrm{I}^n_x(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è un ideale di $\mathrm{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ che non è un ideale primo ([7]).

Esercizio 4. Si considerino i seguenti polinomî a coefficienti interi

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{T(X)} & = & \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} + 2 \\ \mathrm{R(X)} & = & 10\mathrm{X}^2 - 2 \\ \mathrm{A(X)} & = & \mathrm{X}^4 - 49 \end{array}$$

Si dica, se gli anelli $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{T(X)} \rangle$, $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{R(X)} \rangle$ e $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{A(X)} \rangle$ sono campi.

Si dica, se gli anelli $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{T(X)} \rangle$, $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{R(X)} \rangle$ e $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{A(X)} \rangle$ sono dominî d'integrità.

Esercizio 5. Si consideri il seguente polinomio a coefficienti interi

$$\mathrm{U(X)} = \mathrm{X}^2 - 1$$

Si dia una descrizione dell'anello $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U(X)} \rangle$.

Si dica, se $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U(X)} \rangle$ è un campo.

Si dica, se $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U(X)} \rangle$ è un dominio d'integrità.

Si determini l'insieme degli ideali di $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/\langle \mathrm{U(X)} \rangle$ ([8]).

[6] È possibile definire l'insieme $\mathrm{I}_{x_1,...,x_n}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ anche rimuovendo l'ipotesi che i punti $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ siano a due a due distinti; spiegherò come durante l'esercitazione IX.

[7] Siano A un anello commutativo unitario e $I \subseteq A$ un ideale di A. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisca I^n ponendo $I^0 = A$, $I^{n+1} = I^n \cdot I$. Si confronti con quanto scritto nella nota 4.

[8] Si ricordi che, se κ è un campo, allora $\kappa[\mathrm{X}]$ è un anello a ideali principali. Si ricordi, inoltre, che, dati $\mathrm{N(X)}, \mathrm{O(X)} \in \kappa[\mathrm{X}]$, allora $\langle \mathrm{N(X)} \rangle \supseteq \langle \mathrm{O(X)} \rangle$ se e solo se $\mathrm{N(X)} \mid \mathrm{O(X)}$.

Esercizio 6. Si consideri un insieme contenente un solo elemento; ossia, detto x tale elemento, si consideri l'insieme $\{x\}$. Si determinino un insieme Y_x e una relazione di equivalenza $\tau_x \subseteq Y^2$ su Y tali che $\{x\} = Y_x/\tau_x$.

Si consideri un insieme contenente due elementi; ossia, detti x_1, x_2 tali elementi, si consideri l'insieme $\{x_1, x_2\}$. Si determinino un insieme Y_{x_1,x_2} e una relazione di equivalenza $\tau_{x_1,x_2} \subseteq Y^2_{x_1,x_2}$ su Y_{x_1,x_2} tali che $\{x_1, x_2\} = Y/\tau_{x_1,x_2}$ ([9]).

Si consideri un qualsiasi insieme non vuoto X. Si determinino un insieme Y_X e una relazione di equivalenza $\tau_X \subseteq Y_X^2$ su Y_X tali che $X = Y/\tau_X$ ([10]).

Avete appena mostrato che, a patto di avere una assai feconda fantasia o una sensibilità estremamente raffinata, è sempre possibile descrivere un qualsivoglia insieme non vuoto come quoziente di un qualche altro insieme, anch'esso non vuoto.

[9] Sugg.: si scriva $\{x_1, x_2\} = \{x_1\}\dot\cup\{x_2\}$; per ogni $k \in \{1, 2\}$, si determinino, come nella prima parte dell'esercizio, un insieme Y_{x_k} e una relazione di equivalenza $\tau_{x_k} \subseteq Y^2_{x_k}$ su $Y^2_{x_k}$ tali che $\{x_k\} = Y_{x_k}/\tau_{x_k}$; si defiscano Y_{x_1,x_2} e τ_{x_1,x_2} ponendo $Y_{x_1,x_2} = Y_{x_1}\dot\cup Y_{x_2}$ e $\tau_{x_1,x_2} = \iota_{x_1}(\tau_{x_1})\dot\cup\iota_{x_2}(\tau_{x_2})$, per ogni $k \in \{1, 2\}$ essendo $\iota_{x_k} : Y^2_{x_k} \hookrightarrow Y^2_{x_1,x_2}$ l'inclusione naturale.

[10] Sugg.: si scriva $X = \dot\bigcup_{x\in X}\{x\}$; per ogni $x \in X$, si determinino, come nella prima parte dell'esercizio, un insieme Y_x e una relazione di equivalenza $\tau_x \subseteq Y_x^2$ tali che $\{x\} = Y_x/\tau_x$; si defiscano Y_X e τ_X ponendo $Y_X = \dot\bigcup_{x\in X} Y_x$ e $\tau_X = \dot\bigcup_{x\in X}\iota_x(\tau_x)$, per ogni $x \in X$ essendo $\iota_x : Y_x^2 \hookrightarrow Y_X^2$ l'inclusione naturale.