Corso di Laurea Triennale a.a. 2018-19
Geometria Differenziale
Compito a casa del 17/12/2019

Esercizio 1. Dimostrare che il fibrato tangente ad una varietà differenziabile M,

$$TM = \cup_{m \in M} T_m M ,$$

è un fibrato vettoriale C^∞ di rango uguale a $\dim M$.
Determinarne le funzioni di transizione.

Esercizio 2. Consideriamo la varietà differenziabile $\mathbb{R}P^n$. Nel precedente compito a casa avete dimostrato che gli aperti

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \;\; x_i \neq 0\}$$

con le applicazioni $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, $\phi_i[x_0, \dots, x_n] = (x_0/x_i, \dots, \hat{i}, \dots, x_n/x_i)$ costituiscono un atlante di $\mathbb{R}P^n$.
Consideriamo il fibrato universale $(E_1(\mathbb{R}^{n+1}), \pi, \mathbb{R}P^n)$:
(i) verificare che gli aperti U_i sono banalizzanti per $(E_1(\mathbb{R}^{n+1}), \pi, \mathbb{R}P^n)$;
(ii) determinare le associate funzioni di transizione.

Esercizio 3. Sia $E \to X$ un fibrato vettoriale di rango k. Verificare che è ben definito il duale di E, E^*. Determinare le funzioni di transizione di E^* a partire da quelle di E.

Esercizio 4. Sia M una varietà differenziabile e sia $\mathcal{A}$ un atlante numerabile localmente finito per M [1]. Utilizzando una partizione dell'unità subordinata ad $\mathcal{A}$ [2] verificare che ogni varietà differenziabile ammette una metrica riemanniana .
Suggerimento: utilizzando le banalizzazioni locali del fibrato tangente potete definire una metrica riemanniana su $\pi^{-1}(U) \subset TM$, con $(U, \phi_U) \in \mathcal{A}$; fate questo per ogni carta e utilizzate una partizione dell'unità per ottenere un oggetto globale.
La stessa dimostrazione stabilisce l'esistenza di una metrica in un qualsiasi fibrato vettoriale (E, π, M).

Esercizio 5. (facoltativo)
Sia $E_k(\mathbb{R}^n) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid \underline{v} \in p\}$ e sia $\pi : E_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ l'applicazione $(p, \underline{v}) \to p$. Dimostrare che la terna $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è un fibrato vettoriale reale C^0 di rango k.
Dimostrare che $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è di fatto un fibrato C^∞.

Esercizio 6. (facoltativo)
Sia (E, π_E, X) un fibrato vettoriale e sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di aperti

[1] Il fatto che esista un tale atlante è una conseguenza (non banale) delle ipotesi fatte nella definizione di varietà differenziabile: Haudorff e a base numerabile

[2] Si legga attentamente Sernesi Geometria 2, pp. 243 → 246, o, in alternativa, Warner pp. 8 → 11 per definizioni ed enunciati relativi a partizione dell'unità

banalizzanti per E. Rimane allora definito il cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ delle funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

Sia ora (F, π_F, X) un secondo fibrato e supponiamo che gli aperti $\{U_\alpha\}$ siano banalizzanti anche per (F, π_F, X). Sia $\{f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})\}$ il cociclo associato a questo secondo fibrato. In generale diremo che due cocicli $\{k_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ sono equivalenti se $\forall \alpha$ esiste $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL(k, \mathbb{R})$ continuo tale che

$$k_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha h_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1} .$$

Verificare che (E, π_E, X) è isomorfo a (F, π_F, X) se e solo se i rispettivi cocicli sono equivalenti.

Esercizio 7. (facoltativo)
Sia X uno spazio topologico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento. Supponiamo che per ogni coppia $(\alpha, \beta) \in A \times A$ sia assegnata una funzione continua

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

e che questa collezione di mappe verifichi le seguenti proprietà:

1) $g_{\alpha\alpha}(m) = \mathrm{Id}_{k\times k}\ \forall m \in U_\alpha$
2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Sia $\widehat{E}$ l'unione disgiunta dei $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione $\mathcal{R}$ in $\widehat{E}$ come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e)\mathcal{R}(y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } e = g_{\alpha\beta}(x)f$$

Verificare che R è una relazione di equivalenza.
Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \to X$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in X$.
Verificare che (E, π, X) è un fibrato vettoriale (continuo) di rango k.
Verificare che se M è una varietà differenziabile e le $g_{\alpha\beta}$ sono C^∞ allora (E, π, M) può essere dotato di una struttura di fibrato reale C^∞.

Esercizio 8. (facoltativo)
Siano (E, π_E, X) e (F, π_F, X) due fibrati vettoriali C^0. Sia $\phi : E \to F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $\phi|_{E_x}$ sia un isomorfismo di spazi vettoriali per ogni $x \in X$. Verificare che ϕ è allora un isomorfismo di fibrati (e cioè ϕ è anche un omeomorfismo).
Dimostare che se i due fibrati sono C^∞ e ϕ è C^∞ allora dall'ipotesi che $\phi|_{E_x}$ sia un isomorfismo di spazi vettoriali per ogni $x \in X$ discende che ϕ è un diffeomorfismo e quindi un isomorfismo di fibrati C^∞.