Geometria Differenziale. a.a. 2018-19. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 28/11/2018

Esercizio 1. *Dimostrare che la curvatura gaussiana in ogni punto di una superficie rigata è minore o uguale a zero.*

Esercizio 2. *Consideriamo le superfici regolari S e S' parametrizzate sull'aperto $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+$ rispettivamente da*

$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u) \quad e \quad \psi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \log v)$$

Si consideri l'applicazione $f := \psi \circ \phi^{-1} : S \to S'$.
Verificare che f è un diffeomorfismo (scrivere l'epressione di f verificando che è C^∞, osservare che è biettiva e calcolare il differenziale nelle basi indotte dalle parametrizzazioni). Verificare che non è un'isometria. Verificare che $K(P) = K(f(P))$ per ogni $P \in S$. Dedurne che il Teorema Egregium non si inverte.

Esercizio 3. *Sia S una superficie orientabile, con versore normale N. Sia $\sigma : I \to S$ una curva regolare contenuta in S con curvatura κ_σ. Sia $\alpha := N \circ \sigma : I \to S^2$.*
1. *Verificare che se il supporto di σ non contiene punti planari o parabolici, allora α è una curva regolare.*
2. *Supponiamo inoltre che σ sia una linea di curvatura; denotiamo con κ_n la curvatura normale di σ. Dimostrare che*

$$\kappa_\sigma(t) = |\kappa_n(t)| \kappa_\alpha(t)\,.$$

Suggerimento: cercate di calcolare $\kappa_\alpha(t)$.

Esercizio 4. *Sia $\sigma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata secondo la lunghezza d'arco e sia $\phi : (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione $\phi(t, v) = \sigma(t) + v\dot{\sigma}(t)$.*
1. *Verificare che dato $(t, v) \in (a, b) \times \mathbb{R}$ con $v \neq 0$ esiste un intorno aperto U di (t, v) tale che $\phi\big|_U : U \to \phi(U)$ è una parametrizzazione di una superficie regolare. (Questa prima parte dell'esercizio è stata già assegnata....)*
2. *Fissiamo un tale U e sia $S := \phi(U)$; determinare prima e seconda forma fondamentale di S, verificando in particolare che tutti i punti di S sono parabolici.*

Esercizio 5. *Risolvere i problemi 5.3 e 5.4 nel libro di testo.*

Esercizio 6. *Consideriamo la superficie S ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva di equazione*

$$x = z^4 - 2z^2 + 2$$

1. *Determinare i paralleli che sono geodetiche.*
2. *Sia Σ la porzione di S con $|z| \leq 1$. Sia C il parallelo corrispondente a $z = 0$ nella usuale parametrizzazione di S e sia p un suo punto. Sia $\underline{v} \in T_pS$ un vettore tangente e sia $\theta \in [0, \pi]$ l'angolo che esso forma con il vettore tangente a C. Assumiamo che $\underline{v}$ sia tale che $\theta \in [0, \pi/2]$ (e quindi $\underline{v}$ è diretto verso le z crescenti). Sia ora σ la geodetica p.s.l.a. tale che $\sigma(0) = p$, $\dot{\sigma}(0) = \underline{v}$. Verificare che se $\theta < 1/3$ allora la geodetica σ non esce mai da Σ.*
Suggerimento. Utilizzare il Teorema di Clairaut.

Esercizio 7. *Sia S il toro ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza di centro $(R, 0)$ e raggio $r < R$.*
Calcolare la curvatura gaussiana di S e determinare la natura dei punti di S.
Senza utilizzare il Teorema di Gauss-Bonnet verificare direttamente che $\int_S K d\nu = 0$.

Esercizio 8. *Sia S la superficie di equazione*

$$9x^2 + 6y^2 + 15z^2 - 4xy + 2x + 4y - 12\sqrt{5}z + 8 = 0$$

Calcolare $\int_S K d\nu$.