Geometria Differenziale. a.a. 2018-19.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 15/10/2018 (Terzo compito)

Esercizio 1. Nel piano $z = 0$ è assegnata l'iperbole di equazioni $\{z = 0, xy = 1$. Sia S la superficie ottenuta ruotando tale curva intorno all'asse y. Determinare una parametrizzazione di S. Determinare equazioni cartesiane implicite di S [1]. Verificare che S ha due componenti connesse, ognuna delle quali è una superficie regolare.

Esercizio 2. Consideriamo le cinque quadriche generali reali (in forma canonica). Imponendo delle restrizioni sui coefficienti a, b, c, trovare quelle che sono di rotazione. Di ciascuna di esse determinare l'asse di rotazione ed una generatrice.

Definizione. È data una curva $\mathcal{C}$ parametrizzata da $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ ed una funzione a valori vettori $\underline{w} : I \to \mathbb{R}^3$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Consideriamo l'applicazione da $I \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\phi(u, v) = \sigma(u) + v\underline{w}(u).$$

ϕ è detta *superficie parametrizzata rigata di direttrice* $\mathcal{C}$ *e generatrici* $r_u := \sigma(u) + v\underline{w}(u)$. [2]

Definizione. Sia S una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$; diremo che S è una rigata (regolare) se esiste una famiglia r_λ di rette (o di segmenti aperti di retta) disgiunte la cui unione sia S:

$$S = \cup_\lambda r_\lambda\,.$$

Le r_λ sono le *generatrici* di S. Una arco o curva di Jordan $\mathcal{C} \subset S$ che interseca ogni r_λ in un unico punto è, per definizione, una *direttrice* della rigata S.

Esercizio 3. Consideriamo l'applicazione

$$\phi(u, v) = (uv, v, u^2) \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0).$$

- Verificare che ϕ è una superficie parametrizzata.
- Determinare il più grande aperto U di $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ sul quale ϕ è iniettiva.
- Verificare che ϕ è una superficie parametrizzata rigata.
- Sia S' l'immagine di ϕ e sia $S := S' \setminus \{y = 0\}$. Dimostrare che S è unione disgiunta di due superfici regolari.

Esercizio 4. Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $\psi : I \times \mathbb{R}$ l'applicazione $\psi(t, v) := \sigma(t) + v\sigma'(t)$. Sia U un aperto di $I \times \mathbb{R}$. Dare condizioni su U e sulla curvatura di σ affiché $\phi := \psi|_U$ sia una superficie parametrizzata (ovviamente rigata).

Esercizio 5. Risolvere il Problema 3.2 del libro di testo (elicoide retto)

---

[1] descrivere cioè S come $f^{-1}(a)$ con a valore regolare di una funzione C^∞ in $\mathbb{R}^3$.

[2] Notare che, in generale, ϕ non è una superficie parametrizzata in senso stretto: il rango dello Jacobiano di ϕ non è ovunque uguale a due. La dizione "superficie parametrizzata rigata" è quindi impropria. Similmente, l'immagine di ϕ non è in generale una superficie regolare.

Esercizio 6. Sia S il paraboloide iperbolico di equazione cartesiana
$$z = x^2 - y^2$$
parametrizzato da $\phi(t, s) = (t, s, t^2 - s^2)$. Dimostrare che S è rigato da due schiere di rette:
$$S = \cup_\lambda r_\lambda\,, \quad S = \cup_\mu s_\mu.$$
Suggerimento:
l'equazione cartesiana di S si può scrivere $\det \begin{vmatrix} x-y & z \\ 1 & x+z \end{vmatrix} = 0$. *Le righe e le colonne di questa matrice sono allora linearmente dipendenti....*
Verificare che 2 rette della stessa schiera sono sghembe. Studiare l'intersezione di rette appartenenti a schiere diverse.
Sia h la generica retta del fascio di rette per l'origine in $\mathbb{R}^2$. Posto $C = \phi(h)$ determinare fra queste curve quelle che sono rette [3]. Sia r una fra queste rette; parametrizzare S come superficie rigata parametrizzata avente direttrice r.

Esercizio 7. Sia S l'iperboloide iperbolico di equazione cartesiana
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1\,.$$
Dimostrare che S è rigato da due schiere di rette:
$$S = \cup_\lambda r_\lambda\,, \quad S = \cup_\mu s_\mu.$$
Suggerimento:
l'equazione cartesiana di S si può scrivere $\det \begin{vmatrix} x-z & 1-y \\ 1+y & x+z \end{vmatrix} = 0.....$
Sia $P = (1, 1, 1)$. Determinare la retta della prima schiera passante per P, sia essa r. Utilizzando l'intersezione di r con rette della seconda schiera dare una parametrizzazione locale di S intorno a P che la presenti come superficie parametrizzata rigata con direttrice r.

Esercizio 8. Sia S la sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$ e sia $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. Calcolare il piano tangente a S in P utilizzando

- la proiezione stereografica dal polo nord
- la parametrizzazione dell'esempio 3.1.15 del libro
- la parametrizzazione dell'esempio 3.1.16 del libro

e determinando esplicitamente la base $\{\partial_1|_p, \partial_2|_p\}$ del piano tangente indotta dalla parametrizzazione considerata.

[3] Sono 2 rette.