Geometria Differenziale. a.a. 2018-19.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 08/10/2018 (secondo compito)

Esercizio 1. Dimostrare che la curva parametrizzata $\sigma_C : (-1,+\infty) \to \mathbb{R}^2$, $\sigma_C(t) = (3t/(t^3+1), 3t^2/(1+t^3))$ **non** definisce un omeomorfismo con il suo sostegno $\mathrm{Im}(\sigma_C) \subset \mathbb{R}^2$ dotato della topologia indotta da $\mathbb{R}^2$.
Analogamente, dimostrare che la superficie parametrizzata $\sigma_S : (-1,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\sigma_C(t,s) = (3t/(t^3+1), 3t^2/(1+t^3), s)$ **non** definisce un omeomorfismo con il suo sostegno $\mathrm{Im}(\sigma_S) \subset \mathbb{R}^3$ dotato della topologia indotta da $\mathbb{R}^3$.
Suggerimento: dimostrare che queste due applicazioni non sono aperte come applicazioni a valori nei rispettivi sostegni dotati della topologia indotta.

Esercizio 2. Sia $U = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 > 0, x_2 > 0\}$ e sia $\phi(x_1,x_2) = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$. Sia S l'immagine si ϕ. Stabilire se S è una superficie regolare con atlante costituito da un'unica parametrizzazione locale $\{(U,\phi)\}$

Esercizio 3. Utilizzando coordinate polari, e quindi longitudine e latitudine, dimostrare che la superficie sferica $S = \{p \in \mathbb{R}^3 : ||p|| = 1\}$ è una superficie regolare dotata di un atlante con due parametrizzazioni locali.

Esercizio 4. Sia $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 \neq v^2\}$. Sia $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione

$$(u,v) \longrightarrow \left(\frac{u}{u^2-v^2}, \frac{v}{u^2-v^2}, \frac{uv}{u^2-v^2}\right).$$

Verificare che $S = \phi(U)$ è una superficie regolare con atlante costituito da $\{(U,\phi)\}$.

Esercizio 5. Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata secondo la lunghezza d'arco. Fissiamo $r > 0$. Sia $S(r) = \cup_{s\in I} C_s(r)$, con $C_s(r)$ la circonferenza di centro $\sigma(s)$ e raggio r contenuta nel piano per $\sigma(s)$ e di giacitura $(\mathbb{R}\dot\sigma(s))^\perp$. Sotto quali ipotesi sulla curvatura di σ possiamo esprimere $S(r)$ come il sostegno di una superficie parametrizzata ?

Esercizio 6. Sia C una 1-sottovarietà del piano coordinato x_1x_3. Supponiamo che C sia contenuta nel semipiano aperto $x_1 > 0$ e che abbia equazione cartesiana $f(x_1,x_3) = 0$. Verificare che l'insieme S dei punti dello spazio ottenuto facendo ruotare C attorno all'asse x_3 soddisfa l'equazione cartesiana $f(\sqrt{x_1^2+x_2^2}, x_3) = 0$. È possibile dimostrare che S è una superficie regolare tramite lo studio di questa equazione cartesiana ?

Esercizio 7. Determinare l'equazione cartesiana del toro T ottenuto ruotando attorno all'asse x_2 la circonferenza contenuta nel piano coordinato x_1x_2, di raggio r e centro $(a,0,0)$ con $0 < a < r$.
Verificare che T è ottenuta come nell'Esercizio 5 per un'opportuna curva di Jordan σ.

Esercizio 8. Risolvere l'esercizio 3.4 del libro di testo (S^2 è una superficie regolare con atlante dato in termini delle proiezioni stereografiche dal polo nord e dal polo sud).

Esercizio 9. Fra le quadriche euclidee canoniche [1] quali sono superfici regolari ?

[1] si veda ad esempio `http://www1.mat.uniroma1.it/people/piazza/quadriche-scan.pdf`