Geometria Differenziale. a.a. 2018-19.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 01/10/2018

Esercizio 1. Dimostrare che la curvatura di una curva regolare è un invariante per isometrie[1]. Dimostrare che la torsione di una curva biregolare è un invariante per movimenti rigidi [2].

Esercizio 2. Sia $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'elica circolare

$$\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, t)\,.$$

- determinare il piano osculatore in $\sigma(0)$, π_0.
- sia $\widetilde{\sigma}$ la curva piana ottenuta proiettando σ ortogonalmente su π_0. Verificare che le curvature di σ e $\widetilde{\sigma}$ coincidono in $\sigma(0)$.
- verificare in generale che se σ è una curva parametrizzata, $\sigma(t_0) = P_0$, e $k(t_0) \neq 0$, allora la curva $\widetilde{\sigma}$ uguale alla proiezione ortogonale di σ sul piano osculatore π_0 in P_0 ha in P_0 curvatura $\widetilde{k}$ uguale a $k(t_0)$ (suggerimento: si scelga un riferimento opportuno, utilizzando quindi l'esercizio 1).

Esercizio 3. Sia $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata $\mathbb{R} \ni t \to (t, \cosh t, \sinh t) \in \mathbb{R}^3$.

- Calcolare κ, τ ed i tre versori di Frenet; determinare i punti di curvatura massima;
- calcolare il piano osculatore in ogni punto e verificare che forma un angolo costante con l'asse z;
- parametrizzare σ secondo la lunghezza d'arco; determinare gli estremi dei due archi di σ aventi lunghezza 2 e punto iniziale $(0, 1, 0)$.

Esercizio 4. Sia $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata data da

$$\sigma(t) := (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

Riparametrizzare σ secondo la lunghezza d'arco.

Esercizio 5. Sia σ l'elica circolare di raggio r e passo $a > 0$. Determinare la curvatura e la torsione di σ.

Esercizio 6. Determinare le curve biregolari di $\mathbb{R}^3$ che hanno curvatura costante > 0 e torsione costante diversa da zero.

Esercizio 7.
Premessa. Fissiamo un'orientazione del piano $\mathbb{R}^2$ fissando una base di $\mathbb{R}^2$. Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare di classe C^k, $k \geq 2$, parametrizzata secondo la lunghezza d'arco. Sia $\underline{t}$ il versore tangente. Allora esiste un unico versore $\underline{\tilde{n}}$ tale che $\{\underline{t}, \underline{\tilde{n}}\}$ sia una base ortonormale equiorientata alla base fissata. È chiaro che $\dot{\underline{t}}$ è parallelo ad $\underline{\tilde{n}}$ e definiamo la curvatura **orientata** della curva piana,

$$\tilde{\kappa} : I \to \mathbb{R}$$

[1] $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un'isometria se $T\underline{x} = A\underline{x} + \underline{c}$, $A \in O(3)$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$
[2] un'isometria è un movimento rigido se $A \in SO(3)$

tramite l'uguaglianza $\dot{\underline{t}} = \tilde{\kappa}\underline{\tilde{n}}$. *Fine premessa.*
Sia σ una curva piana regolare, con parametrizzazione arbitraria, e sia $\lambda > 0$. Definiamo σ^λ tramite $\sigma^\lambda(t) = \sigma(t) + \lambda\underline{\tilde{n}}(t)$ dove $\underline{\tilde{n}}(t)$ è il versore ortogonale al versore tangente $\underline{t}$ di σ e tale che $\{\underline{t}, \underline{\tilde{n}}\}$ sia equiorientata alla base fissata. Supponiamo che la curvatura orientata $\tilde{\kappa}$ sia ovunque differente da λ^{-1}. Verificare che σ^λ è regolare e dimostrare che

$$\tilde{\kappa}^\lambda = \frac{\tilde{\kappa}}{|1 - \lambda\tilde{\kappa}|}.$$