Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2015-16. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 18/3/2016 (Terzo compito)

Esercizio 1 (di ripasso). Si definisca una relazione sull'insieme delle parti $P(X)$ di un insieme (infinito) X ponendo $A\mathcal{R}B$ se $A \setminus B$ e $B \setminus A$ sono entrambi finiti. Si dica se $\mathcal{R}$ riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva. *[Ricordiamo che la* differenza insiemistica di due insiemi U e V, *denotata* $U \setminus V$, *è l'insieme di tutti gli elementi di* U *che non appartengono a* V*.]*

Esercizio 2 (di ripasso). Determinare, giustificando la risposta, la cardinalità del seguente insieme:

$$B = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, f \text{ invertibile e } f(n) = n \text{ per } n \text{ sufficientemente grande}\}.$$

Esercizio 3 (utile negli esercizi sulla cardinalità).
Vi ricordo che se A e B sono insiemi allora $A^B := \{f : B \to A\}$. Dimostrare che comunque presi 3 insiemi (anche infiniti) si ha

$$|(A^B)^C| = |A^{B\times C}|$$

Suggerimento: c'è una naturale applicazione $\Phi : (A^B)^C \to A^{B\times C}$ che associa a $f : C \to A^B$ l'applicazione $g : B \times C \to A$ definita da $g(b, c) := f(c)(b)$. C'è una naturale applicazione $\Psi : A^{B\times C} \to (A^B)^C$.....

Esercizio 4. Sia $(A, +, \cdot)$ un anello; denotiamo con 0 l'elemento neutro additivo. Vi ricordo che un elemento $a \neq 0$ è un divisore dello zero se $\exists b \neq 0$ tale che $a \cdot b = 0$. Verificare (molto facile) che se A è privo di divisori dello zero allora vale in A la legge di cancellazione moltiplicativa : $ab = ac, a \neq 0 \Rightarrow b = c$.
Vero o Falso: in A vale sempre la legge di cancellazione additiva.
Vero o Falso: nell'anello delle matrici $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ vale la legge di cancellazione moltiplicativa.
Sia A un anello unitario con unità moltiplicativa 1. Verificare che l'insieme

$$\mathcal{U}(A) = \{a \in A \ : \ \exists a' \ | \ a \cdot a' = 1 = a'a \cdot a\}$$

è un gruppo, detto *gruppo degli invertibili* o *gruppo delle unità.*
Determinare $\mathcal{U}(\mathbb{Z})$. Sia F un campo. Determinare $\mathcal{U}(F)$.

Esercizio 5. Verificare che $\mathbb{Z}$ con le operazioni introdotte a lezione è un anello commutativo unitario.

Esercizio 6. Dimostrare che

$$\mathrm{MCD}(a, r) = \mathrm{MCD}(a, s) = 1 \text{ se e solo se } \mathrm{MCD}(a, rs) = 1.$$

Esercizio 7. Consideriamo gli interi $a = 1623$ e $b = 858$. Utilizzando l'algoritmo delle divisioni successive determinare $d := \mathrm{MCD}(a, b)$ ed un'identità di Bezout per d.