ALGEBRA 1 PB-Z
II. 16 III 2012

Esercizio 1. Dato un insieme A, siano $\mathrm{Par}(A)$ l'insieme delle partizioni di A e $\mathrm{Eq}(A)$ l'insieme delle relazioni di equivalenza su A. Dire se esistono applicazioni biunivoche tra $\mathrm{Par}(A)$ e $\mathrm{Eq}(A)$ e, se sì, descrivere brevemente almeno una di tali biezioni.
Sugg.: a ogni $P = \{A_i\}_{i \in I} \in \mathrm{Par}(A)$ si associ la relazione di equivalenza R_P definita da [...]. Viceversa [...]

Soluzione. Gli insiemi $\mathrm{Par}(A)$ e $\mathrm{Eq}(A)$ sono in corrispondenza biunivoca. Infatti, seguendo il suggerimento, basta ricordare quanto provato a lezione, ossia, che:

- data $P = \{A_i\}_{i \in I} \in \mathrm{Par}(A)$, la relazione R_P definita da
$$(a_1, a_2) \in R_P \iff \exists\ i \in I \text{ tale che} a_1, a_2 \in A_i$$
è di equivalenza;
- data $R \in \mathrm{Eq}(A)$, la famiglia delle classi di equivalenza degli elementi di A rispetto a R è una partizione di A;
- $P_{R_P} = P$ e $R_{P_R} = R$.

Esercizio 2. Dati A e B insiemi, denotiamo con B^A l'insieme delle applicazioni da A a B. Si dimostri che, se A e B sono finiti, risulta $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Soluzione. Innanzi tuto, ogni $\varphi \in B^A$, essendo un'applicazione di A in B, è individuata dalla sua immagine $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq B$. Così, poiché $\mathrm{Im}(\varphi)$ contiene gli $|A|$ elementi di B, tra loro non necessariamente distinti, dati da $\varphi(a)$, $a \in A$, segue che la cardinalità di B^A uguaglia il numero di disposizioni con ripetizioni ad $|A|$ ad $|A|$ dei $|B|$ elementi di B (il numero delle immagini degli elementi di A via una qualsivoglia $\varphi \in B^A$ è infatti $|A|$, essendo $|A|$ il numero degli elementi di A). Ora, essendo il numero di tali disposizioni $|B|^{|A|}$, abbiamo $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Esercizio 3. Si provi che l'insieme $\mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$ è numerabile.
Sugg.: si ricordi che l'unione numerabile di insiemi numerabili è a sua volta numerabile e si mostri che $\forall n \in \mathbb{N}$ la famiglia $\mathrm{Fin}_n(\mathbb{N})$ dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ non vuoti e di cardinalità $\leq n$ è numerabile (a tal fine si esibiscano un'iniezione $N_1 \to \mathrm{Fin}_n(\mathbb{N})$ e una suriezione $N_2 \to \mathrm{Fin}_n(\mathbb{N})$, con N_1, N_2 numerabili).

Soluzione. In quanto segue, useremo le stesse notazioni fissate nel suggerimento. Essendo $\mathrm{Fin}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Fin}_n(\mathbb{N})$, basta mostrare che $|\mathrm{Fin}_n(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia (per il teorema di Schroeder-Bernstein) che per ogni $n \in \mathbb{N}$ entrambe le disuguaglianze $|\mathrm{Fin}_n(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}|$ e $|\mathrm{Fin}_n(\mathbb{N})| \geq |\mathbb{N}|$ sono vere. La prima disuguaglianza è presto dimostrata, 'ché, ad esempio, basta prendere $N_1 = \mathbb{N}$ e considerare l'applicazione (evidentemente iniettiva) $N_1 = \mathbb{N} \to \mathrm{Fin}_n(\mathbb{N})$ che a ogni $h \in N_1$ associa il singoletto $\{h\} \in \mathrm{Fin}_n(\mathbb{N})$. Per mostrare la seconda disuguaglianza si prenda $N_2 = \mathbb{N}^n$ e si consideri l'applicazione (evidentemente suriettiva) $N_2 = \mathbb{N}^n \to \mathrm{Fin}_n(\mathbb{N})$ che a ogni n-pla ordinata $(h_1, ..., h_n)$ associa l'insieme $\{h_1, ..., h_n\}$.

Esercizio 4. Siano A_1, ..., A_n insiemi finiti. Si mostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che $|\bigcup_{k=1}^n A_k| = \sum_{k=1}^n \ (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n} |\bigcap_{h=1}^k A_{i_h}|$.

Soluzione. Per $n = 1$ la formula è ovvia: $|A_1| = |A_1|$.

Per $n = 2$ basta ricordare che la cardinalità dell'unione disgiunta di due insiemi è uguale alla somma delle cardinalità dei due insiemi (i.e. $|B_1 \sqcup B_2| = |B_1| + |B_2|$) e scrivere $A_1 = (A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \sqcup (A_1 \cap A_2)$ e $A_2 = (A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) \sqcup (A_1 \cap A_2)$.

Supponendo valida la formula nel caso dell'unione di n insiemi, mostriamo che essa è valida anche nel caso dell'unione di $n + 1$ insiemi:

$$\begin{aligned}
|\textstyle\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k| &= |\textstyle\bigcup_{k=1}^n A_k| + |A_{n+1}| - |(\bigcup_{k=1}^n A_k) \cap A_{n+1}| \\
&= |\textstyle\bigcup_{k=1}^n A_k| + |A_{n+1}| - |\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})| \\
\scriptstyle(\textit{induzione per il} \quad &= \textstyle\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n} |\bigcap_{h=1}^k A_{i_h}| \ + \ |A_{n+1}| + \\
\scriptstyle\textit{I e III addendo)} \quad & \quad - \textstyle\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n} |(\bigcap_{h=1}^k A_{i_h}) \cap A_{n+1}| \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \ (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n} |\bigcap_{h=1}^k A_{i_h}|
\end{aligned}$$

Esercizio 5. Siano A un insieme e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A. Si mostri che $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ è un insieme parzialmente ordinato. Dire se esistono $V, T \in \mathcal{P}(A)$ tali che $\forall B \in \mathcal{P}(A)$, $V \subseteq B$ e $B \subseteq T$.

Soluzione. La relazione $\subseteq$ è riflessiva per definizione di inclusione: $\forall B \in \mathcal{P}(A)$ risulta $B \subseteq B$, essendo $B = B$.

La relazione $\subseteq$ è antisimmetrica per definizione di uguaglianza tra insiemi: $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{P}(A)$ tali che $B_1 \subseteq B_2$ e $B_2 \subseteq B_1$, risulta $B_1 = B_2$.

La relazione $\subseteq$ è transitiva, ossia, $\forall B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{P}(A)$ tali che $B_1 \subseteq B_2$ e $B_2 \subseteq B_3$, risulta $B_1 \subseteq B_3$: infatti basta ricordare che

$$B_i \subseteq B_j \ \Leftrightarrow \ (\forall a \in B_i \Rightarrow a \in B_j).$$

Infine gli insiemi $V = \emptyset$ e $T = A$ verificano le disuguaglianze $V = \emptyset \subseteq B$ e $B \subseteq T = A$ per ogni $B \in \mathcal{P}(A)$.

Esercizio 6. Sia $A = \{a, b, c\}$. Si disegni il diagramma di Hasse di $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

Promemoria. Per disegnare il **diagramma di Hasse** di un insieme finito e parzialmente ordinato $(P, \leq)$, si procede rappresentando sul foglio gli elementi di P secondo le seguenti convenzioni:

I. ogni punto $p \in P$ è rappresentato da una pallina;
II. se $p_1 \leq p_2$, la pallina che rappresenta p_2 è disegnata sopra quella associata a p_1;
III. se $p_1 \leq p_2$ e se non c'è alcun altro $p \in P$ tale che $p_1 \leq p \leq p_2$, si uniscono la pallina di p_1 e quella di p_2 con una linea;
IV. due palline del diagramma possono giacere sulla stessa orizzontale (che non deve essere tracciata) solamente se associati a elementi di P tra loro inconfrontabili (due elementi $p_1, \leq p_2$ sono detti **inconfrontabili** sse $p_1 \not\leq p_2$ e $p_2 \not\leq p_1$).

Soluzione.