ALGEBRA 1 PB-Z
II. 16 III 2012

Esercizio 1. Dato un insieme A, siano $\mathrm{Par}(A)$ l'insieme delle partizioni di A e $\mathrm{Eq}(A)$ l'insieme delle relazioni di equivalenza su A. Dire se esistono applicazioni biunivoche tra $\mathrm{Par}(A)$ e $\mathrm{Eq}(A)$ e, se sì, descrivere brevemente almeno una di tali biezioni.
Sugg.: a ogni $P = \{A_i\}_{i\in I} \in \mathrm{Par}(A)$ si associ la relazione di equivalenza R_P definita da [...]. Viceversa [...]

Esercizio 2. Dati A e B insiemi, denotiamo con B^A l'insieme delle applicazioni da A a B. Si dimostri che, se A e B sono finiti, risulta $\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$.

Esercizio 3. Si provi che l'insieme $\mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$ è numerabile.
Sugg.: si ricordi che l'unione numerabile di insiemi numerabili è a sua volta numerabile e si mostri che $\forall n \in \mathbb{N}$ la famiglia $\mathrm{Fin}_n(\mathbb{N})$ dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ non vuoti e di cardinalità $\leq n$ è numerabile (a tal fine si esibiscano un'iniezione $N_1 \to \mathrm{Fin}_n(\mathbb{N})$ e una suriezione $N_2 \to \mathrm{Fin}_n(\mathbb{N})$, con N_1, N_2 numerabili).

Esercizio 4. Siano A_1, ..., A_n insiemi finiti. Si mostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che $|\bigcup_{k=1}^n A_k| = \sum_{k=1}^n \ (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} |\bigcap_{h=1}^k A_{i_h}|$.

Esercizio 5. Siano A un insieme e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A. Si mostri che $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ è un insieme parzialmente ordinato. Dire se esistono $V, T \in \mathcal{P}(A)$ tali che $\forall B \in \mathcal{P}(A)$, $V \subseteq B$ e $B \subseteq T$.

Esercizio 6. Sia $A = \{a, b, c\}$. Si disegni il diagramma di Hasse di $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.
Promemoria. Per disegnare il **diagramma di Hasse** di un insieme finito e parzialmente ordinato $(P, \leq)$, si procede rappresentando sul foglio gli elementi di P secondo le seguenti convenzioni:

I. ogni punto $p \in P$ è rappresentato da una pallina;
II. se $p_1 \leq p_2$, la pallina che rappresenta p_2 è disegnata sopra quella associata a p_1;
III. se $p_1 \leq p_2$ e se non c'è alcun altro $p \in P$ tale che $p_1 \leq p \leq p_2$, si uniscono la pallina di p_1 e quella di p_2 con una linea;
IV. due palline del diagramma possono giacere sulla stessa orizzontale (che non deve essere tracciata) solamente se associati a elementi di P tra loro inconfrontabili (due elementi $p_1, \leq p_2$ sono detti **inconfrontabili** sse $p_1 \not\leq p_2$ e $p_2 \not\leq p_1$).