Corso di Laurea in Statistica Gestionale. a.a. 2014-15.
Matematica III.
Corso dei Proff. Paolo Piazza e Gioia Vernole
Primo compito a casa (2/10/14)

Esercizio 1. Sia $A := I_\delta(\underline{x}_0) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che $d(\underline{x}, \underline{x}_0) < \delta\}$ (A è l'intorno sferico di centro $\underline{x}_0$ e raggio δ). Verificare che ogni punto $\underline{x}$ di A è interno e che quindi A è un insieme aperto.

Esercizio 2. Sia $C = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che $d(\underline{x}, \underline{x}_0) \leq \delta\}$. Verificare che C è un chiuso.

Esercizio 3. Disegnare l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos y \leq x \leq 1, -\pi < y < \pi\}$ e stabilire (graficamente) che A non è né aperto né chiuso.

Esercizio 4. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) := \sqrt{1 - x - y}\sqrt{1 - y^2} + \log(\log x - y)$$

e disegnarlo sul piano cartesiano.
Fare lo stesso esercizio per la funzione

$$g(x, y) := \log(1 - x^2 - y^2) + \log(\frac{1}{4} - y^2)\,.$$

Utile disuguaglianza
Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Sappiamo che $(|x| - |y|)^2 \geq 0$. Quindi $x^2 + y^2 - 2|x||y| \geq 0$ da cui deduciamo che

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{1}$$

Esercizio 5. Verificare utilizzando la definizione che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0\,.$$

Suggerimento: utilizzare la (1).

Utile osservazione Supponiamo per semplicità che f sia definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (quindi $(0, 0)$ è di accumulazione per il dominio di f). Come spiegato nel libro a pagina 44

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \ell \;\; \forall m \in \mathbb{R}$$

In parole: se f tende ad ℓ quando (x, y) tende a $(0, 0)$ allora necessariamente f tende ad ℓ *lungo le rette* $y = mx$.
In particolare, se esiste m tale che $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$ non esiste oppure questo limite esiste ma dipende da m allora **non** esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. Più in generale possiamo considerare

$$\lim_{x\to 0} f(x, \phi(x))$$

dove $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione derivabile che vale 0 in $x = 0$. Ad esempio $\phi(x) = \alpha x^2$. Si ha ancora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x, \phi(x)) = \ell$$

In parole: se f tende ad ℓ quando (x,y) tende a $(0,0)$ allora necessariamente f tende al ℓ *lungo il grafico della funzione* $\phi(x)$.
Ad esempio

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x,\alpha x^2) = \ell \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

e quindi se esiste α tale che $\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x^2)$ non esiste oppure questo limite esiste ma dipende da α allora **non** esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
Fine osservazione.

Esercizio 6. Dimostrare che non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Esercizio 7. Consideriamo

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$

definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
7.1 Verificare che esiste il limite di questa funzione lungo una qualsiasi retta $y = mx$ e che questo limite è 0.
7.2 Verificare che sebbene sia vera **7.1** *non* esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}\,.$$

Suggerimento: considerare le parabole $y = \alpha x^2$...

Esercizio 8. Consideriamo le funzioni $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

con $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Stabilire se g ed h sono continue in $(0,0)$.