Corso di Laurea in Matematica.
Geometria 1. a.a. 2014-15.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 3/10/2014 (Primo compito)

Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base standard (o canonica) $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ fissata. Coordinate associate (x^1, x^2, x^3, x^4).
Sia $b(\, , \,)$ la forma bilineare simmetrica definita in coordinate da

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u^1 v^1 - u^2 v^2 + u^3 v^4 + u^4 v^3$$

1. Scrivere la matrice associata a b nella base $\mathcal{E}$, $A_b^{\mathcal{E}}$. Verificare che b è non degenere.

2. Utilizzando il concetto di vettore non-isotropo e di b-ortogonale ad un vettore non-isotropo, costruite una base $\mathcal{K}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\, , \,)$.

In $\mathbb{R}^4$ c' è una struttura di spazio euclideo ottenuta considerando il prodotto scalare canonico $\bullet$. $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ è quindi uno *spazio vettoriale euclideo*; rispetto a questo prodotto scalare la base canonica è ortonormale. Tutto ciò vi è ben noto.

3. Definire a partire da $b(\, , \,)$ un operatore simmetrico T. Trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ costituita da autovettori per T.

4. Determinare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ rispetto alla quale $b(\, , \,)$ si scriva in forma diagonale. In altre parole, determinare una base ortonormale $\mathcal{H}$ di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ tale che $A_b^{\mathcal{H}}$ sia diagonale.

5. Determinare una base $\mathcal{G}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi l'operatore T ma *non* diagonalizzi la forma $b(\, , \,)$.
Suggerimento. Sicuramente dovete fissare una base $\mathcal{G}$ di autovettori per T; come andranno scelti questi autovettori per essere tali da *non* diagonalizzare $b(\, , \,)$?

6. Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\, , \,)$ ma *non* diagonalizzi T.

Sono dati i 4 vettori linearmente indipendenti

$$\mathcal{W} = \{\underline{w}_1 = (1,0,0,0) \quad \underline{w}_2 = (1,1,0,0) \quad \underline{w}_3 = (0,0,1,0) \quad \underline{w}_4 = (0,0,0,1)\}.$$

Definiamo un *nuovo* prodotto scalare $< \, , \, >$ in $\mathbb{R}^4$ ponendo

$$< \underline{u}, \underline{v} >:= b_{I_4}^{\mathcal{W}}(\underline{u}, \underline{v})\,.$$

Otteniamo un *nuovo* spazio vettoriale *euclideo* $(\mathbb{R}^4, < \, , \, >)$

7. Verificare che l'espressione di $< \, , \, >$ *nella base canonica* è:

$$< (x^1, x^2, x^3, x^4), (y^1, y^2, y^3, y^4) >= x^1 y^1 - x^1 y^2 - x^2 y^1 + 2x^2 y^2 + x^3 y^3 + x^4 y^4$$

Osserviamo che questa espressione è diversa da quella del prodotto scalare canonico $(x^1, x^2, x^3, x^4) \bullet (y^1, y^2, y^3, y^4) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 + x^4 y^4$. Detto diversamente: *come spazi euclidei* $(\mathbb{R}^4, < \, , \, >)$ e $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ sono *diversi.*
Premessa all'esercizio **8.** L'operatore di cui in **3.** dipende dalla struttura di spazio euclideo definita dal prodotto scalare canonico $\bullet$. Se cambiamo prodotto scalare allora otteniamo (presumibilmente) un operatore diverso.

8. Calcolare la matrice associata nella base canonica all'operatore simmetrico T' definito dalla forma bilineare (1) e dal nuovo prodotto scalare $< \, , \, >$.

Suggerimento. È facile calcolare $A_b^{\mathcal{W}}$ perché basta utilizzare la formula che collega le matrici associate ad una fissata forma bilineare in due basi diverse. A partire da $A_b^{\mathcal{W}}$ otteniamo $M_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(T')$ (immediato dalla definizione) e una volta noto $M_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(T')$ possiamo determinare $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(T')$.
Verificate ora che T e T', pur essendo associati alla stessa forma bilineare, sono operatori *diversi*.