Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2015-16. Prof. P. Piazza

Compito a casa del 15/5/2016

Esercizio 1. (Molto facile) Sia R un dominio di integrità e consideriamo $R[X]$. Verificare che $\forall P, Q \in R[X]$ si ha $\partial(PQ) = \partial(P) + \partial(Q)$.

Esercizio 2. Sia R un anello commutativo unitario e sia $S \subset R$ un sottoinsieme non vuoto di R. Verificare che l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi in S a coefficienti in R

$$(S) := \{\sum_{\text{finite}} r_k s_k\,, \quad s_k \in S, r_k \in R\}$$

è un ideale di R (l'ideale generato da S).
In particolare, se $x \in R$ allora $(x) := \{xr, r \in R\}$ è un ideale di R, l'ideale generato da x. Si scrive anche xR al posto di (x).
Un ideale J di R è detto *principale* se esiste $j \in R$ tale che $J = (j)$.

Esercizio 3.
3.1 Sia $R = \mathbb{Z}[X]$ e sia $J = (2, X)$, l'ideale generato dal polinomio 2 e dal polinomio X.
Verificare che se $P \in J$ allora P ha termine noto in $2\mathbb{Z}$.
Dimostrare che J *non* è principale.
Suggerimento: procedere per assurdo.
3.2 Nell'anello $\mathbb{Q}[X]$ verificare che l'ideale (F, G) con $F = X^7 - X^5 - X^4 + X^2$ e $G = X^5 - X$ è principale, determinando $H \in \mathbb{Q}[X$ tale che $(H) = (F, G)$.
Suggerimento: fare uso del Massimo Comune Divisore.

Esercizio 4. Sia R un anello commutativo e sia $S \subset R$ un sottoinsieme non vuoto di R. Verificare che (S) è uguale all'intersezione di tutti gli ideali di R contenenti S.

Esercizio 5. Sia $R = \mathbb{K}[X]$ con $\mathbb{K}$ un campo. Sia $P \in \mathbb{K}[X]$ un polinomio di grado ≥ 1. Definiamo una relazione di equivalenza in $\mathbb{K}[X]$:

$$F \equiv_P G \;\text{ se e solo se }\; P|(F - G)$$

Verificare che $\equiv_P$ è una relazione di equivalenza e che è compatibile con le due operazioni di $\mathbb{K}[X]$. Dedurne che $\mathbb{K}[X]/\equiv_P$ è un anello. Verificare che esso coincide con $\mathbb{K}[X]/(P)$ con (P) l'ideale generato da P. Verificare che per ogni $[F] \in \mathbb{K}[X]/(P)$ esiste unico $R \in \mathbb{K}[X]$ tale che $\partial R < \partial P$ e $[F] = [R]$.
Suggerimento: utilizzare la divisione euclidea.
Verificare che l'applicazione $\iota : \mathbb{K} \to \mathbb{K}[X]/(P)$ che manda $\alpha \in \mathbb{K}$ in $[\alpha]$ è iniettiva. Sia $x := [X]$ (la classe del polinomio X). Allora, tenendo conto dell'iniettività di ι possiamo scrivere ogni elemento di $\mathbb{K}[X]/(P)$ come

$$[F] = \sum_{j=1}^{n} a_j x^j\,, \qquad a_j \in \mathbb{K}\,.$$

Per definizione di anello quoziente si ha $P(x) = 0$. Osserviamo che come insieme $\mathbb{K}[X]/(P) = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_\ell x^\ell; \ell < \partial(P), a_j \in \mathbb{K}\}$ e la sua operazione di somma è quella naturale su questo insieme. Tuttavia, come anello $\mathbb{K}[X]/(P)$ ha una complicata operazione di prodotto, dettata dalla divisione euclidea e dalla relazione $P(x) = 0$. Si scrive a volte:

$$\mathbb{K}[X]/(P) = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_\ell x^\ell ; \ell < \partial(P), a_j \in \mathbb{K}\, , P(x) = 0\}$$

Esercizio 6. Verificare che $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 1)$ non è un dominio di integrità.

Esercizio 7. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ e consideriamo il polinomio $P := X^2 + X + \overline{1}$. Verificare che P è irriducibile. Scrivere tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_2[X]/(P)$ e la tabella additiva e moltiplicativa, verificando in particolare che $\mathbb{Z}_2[X]/(P)$ è un campo.

Esercizio 8. Sappiamo che il polinomio $X^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{R}[X]$. Dimostrare che $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$.
Possibile suggerimento: considerare l'applicazione $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ che manda F in $F(i)$.

Esercizio 9. Sia R un dominio di integrità. Verificare che $R[X]/(X)$ è isomorfo a R.
Suggerimento: utilizzare l'applicazione $R[X] \to R$ che manda P in $P(0)$.

Esercizio 10. Sia R un dominio di integrità e sia $a \in R$ un suo elemento non nullo. Verificare che $R[X]/aR[X]$ è isomorfo a $(R/aR)[X]$.
Suggerimento: utilizzare l'applicazione $R[X] \to (R/aR)[X]$ che associa a $\sum_{j=0}^n a_j X^j$ l'elemento $\sum_{j=0}^n \overline{a_j} X^j$, con $\overline{\gamma} = \pi(\gamma)$, $\pi : R \to R/aR$ la proiezione canonica.