Geometria

Canale 3. Lettere J-PE (Prof P. Piazza)

Esame scritto del 12/02/2014. Compito A.

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Orale (cerchiare la scelta):

Il 14/02/14 alle ore 16 **Dal 17/02/2014 ore 9**

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	6	
3	6	
4	6+1	
5	6+2	
Totale	31+3	

ATTENZIONE: : **giustificate le vostre argomentazioni !**

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_2[z]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata z a coefficienti reali di grado ≤ 2. Fissiamo la base standard $\mathcal{E} = \{1, z, z^2\}$. Definiamo un prodotto scalare $<\,,\,>: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$< p, q > := p(0)q(0) + p(\frac{1}{2})q(\frac{1}{2}) + p(1)q(1)$$

1) Verificare che $<\,,\,>$ è definito positivo.
Consideriamo lo spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}_2[z], <\,,\,>)$
2) Calcolare $||2 + z||$
3) Scrivere la matrice del prodotto scalare nella base $\mathcal{E} = \{1, z, z^2\}$.
4) Dare equazioni cartesiane, nelle coordinate indotte dalla base $\mathcal{E}$, per il sottospazio W ortogonale al vettore $1 - z$.
5) Trovare una base ortogonale di W.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 2. Si consideri $M_{2\,2}(\mathbb{R})$, lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a elementi nel campo $\mathbb{R}$. Si consideri l'operatore lineare $T : M_{2\,2}(\mathbb{R}) \to M_{2\,2}(\mathbb{R})$ definito da

$$T\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a-d & a+b+d \\ b-c & a+d \end{vmatrix} \tag{1}$$

1. Determinare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base standard di $M_{2\,2}(\mathbb{R})$

$$\{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\}$$

(presa come base di partenza e base di arrivo).
2. Studiare la diagonalizzabilità di T.
3. Considerare ora l'operatore $T^{\mathbb{C}} : M_{2\,2}(\mathbb{C}) \to M_{2\,2}(\mathbb{C})$ definito ancora da (1). Studiare la diagonalizzabilità di $T^{\mathbb{C}}$.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 3. Sia $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ con coordinate associate (x, y, z).

1. Sono date le rette r, s, di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad .$$

Verificare che esiste ed è unico il piano π contenente r ed s. Determinare l'equazione cartesiana di π.

2. Calcolare la distanza di s dall'origine.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 4. Consideriamo la matrice

$$A := \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da A.
1. Studiare iniettività e suriettività di L_A.
2. Spiegare perché esiste una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per L_A.
3. Determinare una matrice B tale che $B \in O(4)$ e $B^{-1}AB$ sia diagonale. Stabilire se tale matrice B è unica.
4. Facoltativo. Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica

$$\phi(\underline{x}) = -2x_1x_4 + x_2^2 + x_3^2\,.$$

Stabilire se $\phi(\underline{x}) \geq 0 \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^4$.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 5. Spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^4, <\,,\,>)$ con prodotto scalare canonico $<\,,\,>$ e base canonica fissata.
È dato il piano σ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 1, 0) \qquad \underline{v}_2 = (0, 1, -1, 0)$$

1. Determinare equazioni cartesiane per σ.
2. Determinare equazioni cartesiane per $\sigma^\perp$. Verificare che il vettore $\underline{v}_3 = (1, -1, -1, 0) \in \sigma^\perp$.
3. Sia S l'operatore di simmetria ortogonale rispetto a σ. Determinare la matrice associata a S nella base canonica.
4. Facoltativo. Verificare che il piano $\tau = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$ è invariante per S. Verificare che la coppia ordinata di vettori $\{\underline{u} = (2, -1, 0, 0), \underline{w} = (0, 1, 2, 0)\}$ è una base di τ; determinare la matrice associata alla restrizione $S|_\tau$ in tale base (presa come base di partenza e base di arrivo)

Soluzione:

Risposta: