

Geometria

Canale 3. Lettere J-PE (Prof P. Piazza)

Esame scritto del 12/02/2014. Compito A.

Nome e Cognome: _____

Numero di Matricola: _____

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	6	
3	6	
4	6+1	
5	6+2	
Totale	31+3	

ATTENZIONE: : giustificate le vostre argomentazioni !

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_2[z]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata z a coefficienti reali di grado ≤ 2 . Fissiamo la base standard $\mathcal{E} = \{1, z, z^2\}$. Definiamo un prodotto scalare $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\langle p, q \rangle := p(0)q(0) + p\left(\frac{1}{2}\right)q\left(\frac{1}{2}\right) + p(1)q(1)$$

1) Verificare che \langle, \rangle è definito positivo.

Consideriamo lo spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}_2[z], \langle, \rangle)$

2) Calcolare $\|2 + z\|$

3) Scrivere la matrice del prodotto scalare nella base $\mathcal{E} = \{1, z, z^2\}$.

4) Dare equazioni cartesiane, nelle coordinate indotte dalla base \mathcal{E} , per il sottospazio W ortogonale al vettore $1 - z$.

5) Trovare una base ortogonale di W .

Soluzione.

1). Se $p \in \mathbb{R}_2[z]$ allora $\langle p, p \rangle = p(0)^2 + p(1/2)^2 + p(1)^2$ che è ovviamente ≥ 0 . Si ha $\langle p, p \rangle = 0$ se e solo se $p(0) = p(1/2) = p(1) = 0$; ne segue che p ha 3 radici e quindi, essendo di grado minore o uguale a 2, segue che p è il polinomio nullo. Riassumendo: $\langle p, p \rangle \geq 0$ e $\langle p, p \rangle = 0$ se e solo se p è il polinomio nullo e quindi \langle, \rangle è definita positiva.

2). Per definizione $\|2 + z\| = \sqrt{\langle 2 + z, 2 + z \rangle}$; ma

$$\langle 2 + z, 2 + z \rangle = ((2+z)(0))^2 + ((2+z)(1/2))^2 + ((2+z)(1))^2 = 2^2 + (2+1/2)^2 + (2+1)^2 = 4 + 25/4 + 9 = 77/4$$

$$\text{e quindi } \|2 + z\| = \sqrt{77/4} = \sqrt{77}/2$$

3). Dobbiamo determinare la matrice simmetrica $A \in M_{33}(\mathbb{R})$ definita da

$$A := \begin{vmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, z \rangle & \langle 1, z^2 \rangle \\ \langle 1, z \rangle & \langle z, z \rangle & \langle z, z^2 \rangle \\ \langle 1, z^2 \rangle & \langle z, z^2 \rangle & \langle z^2, z^2 \rangle \end{vmatrix}$$

Facendo i conti si ottiene

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 3/2 & 5/4 \\ 3/2 & 5/4 & 9/8 \\ 5/4 & 9/8 & 17/16 \end{vmatrix}.$$

4). Se p ha coordinate \underline{x} nella base \mathcal{E} e q ha coordinate \underline{y} allora

$$\langle p, q \rangle = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \left| \begin{array}{ccc} 3 & 3/2 & 5/4 \\ 3/2 & 5/4 & 9/8 \\ 5/4 & 9/8 & 17/16 \end{array} \right| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

Osserviamo che il polinomio $1 - z$ ha coordinate $(1, -1, 0)$ nella base \mathcal{E} . Ne segue, per definizione di W^\perp , che i vettori di W^\perp sono tutti e soli i vettori le cui coordinate \underline{x} soddisfano

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} 3 & 3/2 & 5/4 \\ 3/2 & 5/4 & 9/8 \\ 5/4 & 9/8 & 17/16 \end{array} \right| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = 0$$

che, facendo i conti, si riscrive come

$$12x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

Questa è l'equazione cartesiana di W^\perp .

5). Una base per W^\perp è data dai polinomi p'_1 e p'_2 di coordinate $(1, -6, 0)$ e $(0, 1, -2)$ rispettivamente (queste coordinate soddisfano l'equazione di W^\perp e sono non-proporzionali). Calcoliamo il prodotto scalare $\langle p'_1, p'_2 \rangle$; si ha

$$\langle p'_1, p'_2 \rangle = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \left| \begin{array}{ccc} 3 & 3/2 & 5/4 \\ 3/2 & 5/4 & 9/8 \\ 5/4 & 9/8 & 17/16 \end{array} \right| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{vmatrix} = 19/2$$

(controllate i conti). Una base ortogonale di W^\perp è data dalla coppia $\{p_1, p_2\}$ con $p_1 = p'_1$ e p_2 di coordinate date da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -\frac{\langle p'_1, p'_2 \rangle}{\langle p'_1, p'_1 \rangle} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lascio a voi i conti.

Esercizio 2. Si consideri $M_{22}(\mathbb{R})$, lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a elementi nel campo \mathbb{R} . Si consideri l'operatore lineare $T : M_{22}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{22}(\mathbb{R})$ definito da

$$T \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a-d & a+b+d \\ b-c & a+d \end{vmatrix} \quad (1)$$

1. Determinare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base standard di $M_{22}(\mathbb{R})$

$$\left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

(presa come base di partenza e base di arrivo).

2. Studiare la diagonalizzabilità di T .

3. Considerare ora l'operatore $T^{\mathbb{C}} : M_{22}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{22}(\mathbb{C})$ definito ancora da (1). Studiare la diagonalizzabilità di $T^{\mathbb{C}}$.

Soluzione:

1. Si ha, per definizione,

$$T \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad T \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$T \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad T \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e quindi la matrice associata a T nella base standard è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Il polinomio caratteristico di T è dato da $\det(A - \lambda I_4)$ che è uguale a $(-1 - \lambda)(1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$; dato che il polinomio di secondo grado ha radici complesse coniugate non-reali, ne segue che T non è diagonalizzabile.

3. Il polinomio caratteristico di $T^{\mathbb{C}}$ è ancora il polinomio $(-1 - \lambda)(1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$; nel campo complesso questo polinomio ha 4 radici distinte; ne segue che $T^{\mathbb{C}}$ è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 con coordinate associate (x, y, z) .

1. Sono date le rette r, s , di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Verificare che esiste ed è unico il piano π contenente r ed s . Determinare l'equazione cartesiana di π .

2. Calcolare la distanza di s dall'origine.

Soluzione. 1. Un vettore direttore di r è $\underline{r} = (1, 2, -1)$; un vettore direttore di s è $\underline{s} = (1, -1, 0)$. Ne segue che le due rette non sono parallele. Per verificare che sono incidenti possiamo applicare il criterio di coplanarità oppure cercare l'intersezione delle due rette risolvendo il sistema che si ottiene prendendo le equazioni cartesiane di r e le equazioni cartesiane di s . Seguendo il secondo metodo otteniamo il punto P di coordinate $(1, 2, 0)$. A questo punto abbiamo la giacitura di π ed il passaggio per un punto; l'equazione cartesiana di π è quindi data da

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e sviluppando si ottiene l'equazione $x + y + 3z - 3 = 0$.

2. La distanza di s dall'origine è per definizione la distanza fra l'origine e la proiezione ortogonale dell'origine sulla retta s . Questa proiezione è data prendendo l'intersezione della retta s con il piano per l'origine ortogonale a s ; quest'ultimo è il piano di equazione cartesiana $x - y = 0$. L'intersezione di questo piano con la retta s è il punto Q di coordinate $(3/2, -3/2, 0)$ e quindi

$$d(s, O) = d(Q, O) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 4. Consideriamo la matrice

$$A := \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da A .

1. Studiare iniettività e suriettività di L_A .
2. Spiegare perché esiste una base di \mathbb{R}^4 costituita da autovettori per L_A .
3. Determinare una matrice B tale che $B \in O(4)$ e $B^{-1}AB$ sia diagonale. Stabilire se tale matrice B è unica.
4. **Facoltativo.** Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica

$$\phi(\underline{x}) = -2x_1x_4 + x_2^2 + x_3^2.$$

Stabilire se $\phi(\underline{x}) \geq 0 \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^4$.

Soluzione.

1. Il determinante di A è diverso da zero; ne segue che L_A è bigettiva.
2. A è una matrice simmetrica; quindi L_A è un operatore simmetrico in \mathbb{R}^4 dotato del prodotto scalare canonico. Per il teorema spettrale esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^4 costituita da autovettori per L_A ; in particolare L_A è diagonalizzabile.
3. Per determinare B dobbiamo determinare una base *ortonormale* di autovettori. Il polinomio caratteristico di A è $(\lambda+1)(\lambda-1)^3$ che ha radici $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$ di molteplicità algebrica rispettivamente 1 e 3. Una base per V_{-1} è data da $(1, 0, 0, 1)$ mentre una base per V_1 è data da $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$. Notiamo che questi 4 vettori sono già ortogonali. Normalizzandoli e mettendo le coordinate così ottenute per colonna si ottiene la matrice B del cambiamento di base, dalla base canonica alla base ortonormale di autovettori:

$$B = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Tale matrice B soddisfa le due proprietà richieste nell'esercizio: $B \in O(4)$ e $B^{-1}AB$ è diagonale. B non è unica perché esistono infinite basi ortonormali di autovettori.

4. **Facoltativo** Non è vero che $\phi(\underline{x}) \geq 0 \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^4$; infatti ϕ è la forma quadratica associata alla forma bilineare definita dalla matrice A nella base canonica; in particolare $\phi(\underline{x}) < 0$ se \underline{x} sono le coordinate di un autovettore in V_{-1} .

Esercizio 5. Spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^4, \langle, \rangle)$ con prodotto scalare canonico \langle, \rangle e base canonica fissata.

È dato il piano σ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 1, 0) \quad \underline{v}_2 = (0, 1, -1, 0)$$

1. Determinare equazioni cartesiane per σ .
2. Determinare equazioni cartesiane per σ^\perp . Verificare che il vettore $\underline{v}_3 = (1, -1, -1, 0) \in \sigma^\perp$.
3. Sia S l'operatore di simmetria ortogonale rispetto a σ . Determinare la matrice associata a S nella base canonica.
4. **Facoltativo.** Verificare che il piano $\tau = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$ è invariante per S . Verificare che la coppia ordinata di vettori $\{\underline{u} = (2, -1, 0, 0), \underline{w} = (0, 1, 2, 0)\}$ è una base di τ ; determinare la matrice associata alla restrizione $S|_\tau$ in tale base (presa come base di partenza e base di arrivo)

Soluzione.

1. Consideriamo la matrice

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \end{array} \right|$$

riduciamo con Gauss e applichiamo la compatibilità. Otteniamo le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

2. Il vettore \underline{x} appartiene a σ^\perp se e solo se è ortogonale a \underline{v}_1 e è ortogonale a \underline{v}_2 se e solo se

$$\begin{cases} \langle \underline{x}, \underline{v}_1 \rangle = 0 \\ \langle \underline{x}, \underline{v}_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

se e solo se

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Il vettore \underline{v}_3 ha coordinate che soddisfano queste due equazioni e quindi appartiene a σ^\perp . Osserviamo che il vettore $\underline{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$ è anche un vettore di σ^\perp e che la coppia

$$\{\underline{f}_3 := \frac{\underline{v}_3}{\|\underline{v}_3\|}, \underline{f}_4 := \underline{v}_4\} \equiv \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right), (0, 0, 0, 1) \right\}$$

è una base ortonormale di σ^\perp .

3. Per definizione

$$S\underline{x} = \underline{x} - 2P_{\sigma^\perp}(\underline{x})$$

con P_{σ^\perp} l'operatore di proiezione ortogonale su σ^\perp . Si ha Quindi

$$S\underline{x} = \underline{x} - 2(\langle \underline{x}, \underline{f}_3 \rangle \underline{f}_3 + \langle \underline{x}, \underline{f}_4 \rangle \underline{f}_4)$$

e calcolando i trasformati della base canonica e mettendo le loro coordinate in colonna troviamo la matrice cercata:

$$\left| \begin{array}{cccc} 1/3 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

4. **Facoltativo.** Per definizione $S\underline{v}_1 = \underline{v}_1$ e $S\underline{v}_3 = -\underline{v}_3$. Quindi τ è invariante. Si ha $\underline{u} = \underline{v}_1 + \underline{v}_3$ e $\underline{w} = \underline{v}_1 - \underline{v}_3$ e quindi $\{\underline{u}, \underline{w}\}$ è una base di τ . Si ha, per linearità:

$$S(\underline{u}) = S(\underline{v}_1 + \underline{v}_3) = S(\underline{v}_1) + S(\underline{v}_3) = \underline{v}_1 - \underline{v}_3 = \underline{w}$$

$$S(\underline{w}) = S(\underline{v}_1 - \underline{v}_3) = S(\underline{v}_1) - S(\underline{v}_3) = \underline{v}_1 + \underline{v}_3 = \underline{u}$$

e quindi la matrice associata a $S|_\tau$ nella base $\{\underline{u}, \underline{w}\}$ è la matrice

$$\left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right|$$