Geometria

Canale 3. Lettere J-PE (Prof P. Piazza)

Esame scritto del 29/1/2014. Compito A.

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Orale (cerchiare l'appello più probabile):

I orale (30/1/14, ore 14) **II orale (14/2/14)**

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6+1	
2	6	
3	6+1	
4	6+1+1	
5	6	
Totale	34	

ATTENZIONE: : **giustificate le vostre argomentazioni !**

Esercizio 1. Spazio vettoriale metrico $\mathbb{R}^3$ con prodotto scalare canonico e base canonica fissata. Sono dati i piani

$$\alpha_1 : x + y - z = 0 \qquad \alpha_2 : x + y + z = 0$$

Siano S_1, S_2 le simmetrie ortogonali rispetto ad α_1, α_2 rispettivamente.
(1) Scrivere le matrici associate a S_1 e S_2 nella base fissata (le denotiamo A_1 e A_2).
(2) Scrivere la matrice associata a $T := S_1 \circ S_2$.
(3) Facoltativo Verificare che il piano $\pi : x - y = 0$ è invariante per T.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 2. Spazio euclideo $\mathcal{E}^3$. Riferimento cartesiano ortonormale $O\underline{i}\underline{j}\underline{k}$ con coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni cartesiane per la retta r passante per il punto $P(1, 0, 0)$, incidente ed ortogonale alla retta s di equazioni cartesiane $\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 3. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con base canonica fissata.
(1) Dimostrare che esiste unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che ammette i vettori $\underline{w}_1 = (2,1)$ e $\underline{w}_2 = (1,2)$ come autovettori associati agli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ rispettivamente.
(2) Determinare la matrice A associata ad F nella base canonica.
(3) Determinare una matrice invertibile B tale che $B^{-1}AB$ sia diagonale
(4) **Facoltativo** Calcolare A^{1722}.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale delle matrici reali $M_{2\,2}(\mathbb{R})$ con base canonica

$$\{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\}$$

consideriamo l' endomorfismo F definito da

$$F(A) := \frac{A + A^T}{2}$$

(0) (Facoltativo) Verificare che la formula $< A, B >:= \mathrm{Tr}(B^T A)$ definisce un prodotto scalare definito positivo in $M_{2\,2}(\mathbb{R})$

(0.5) (Facoltativo) Verificare che F è un operatore simmetrico in $(M_{2\,2}(\mathbb{R}), <\,,\,>)$.
Suggerimento: la traccia gode della seguente notevole proprietà: $\mathrm{Tr}(CD) = \mathrm{Tr}(DC)\ \forall C, D \in M_{2\,2}(\mathbb{R})$. (La verifica è un semplice conto.)

(1) Determinare una base di $M_{2\,2}(\mathbb{R})$ costituita da autovettori per F.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica fissata. Consideriamo la forma bilineare simmetrica

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = 4x_1y_1 + 5x_2y_2 + 5x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 \, .$$

(1) Scrivere $b(\underline{x}, \underline{y})$ nella forma $\underline{y}^T A \underline{x}$ per un'opportuna matrice simmetrica A. Scrivere l'espressione $\phi(\underline{x})$ della forma quadratica associata.
(2) Verificare che $b(\, , \,)$ è *definita positiva* e che definisce quindi in $\mathbb{R}^3$ un prodotto scalare definito positivo che denotiamo con $< \, , \, >$.
Consideriamo lo spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^3, < \, , \, >)$. (Attenzione: $< \, , \, >$ non è il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$.) Consideriamo il sottospazio

$$U := \text{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right| , \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right| \right)$$

(3) Determinare una base ortogonale di U, sia essa $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$, con la proprietà che $\underline{w}_1 = (0, 1, 0)$. Determinare poi una base di $U^\perp$.

Soluzione:

Risposta: