Geometria

Canale 3. Lettere J-PE (Prof P. Piazza)

Esame scritto del 29/1/2014. Compito A.

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Orale (cerchiare l'appello più probabile):

I orale (30/1/14, ore 14) **II orale (14/2/14)**

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6+1	
2	6	
3	6+1	
4	6+1+1	
5	6	
Totale	34	

ATTENZIONE: : **giustificate le vostre argomentazioni !**

Esercizio 1. Spazio vettoriale metrico $\mathbb{R}^3$ con prodotto scalare canonico e base canonica fissata. Sono dati i piani

$$\alpha_1 : x + y - z = 0 \qquad \alpha_2 : x + y + z = 0$$

Siano S_1, S_2 le simmetrie ortogonali rispetto ad α_1, α_2 rispettivamente.
(1) Scrivere le matrici associate a S_1 e S_2 nella base fissata (le denotiamo A_1 e A_2).
(2) Scrivere la matrice associata a $T := S_1 \circ S_2$.
(3) Facoltativo Verificare che il piano $\pi : x - y = 0$ è invariante per T.

Soluzione: Sappiamo che la simmetria ortogonale rispetto ad un piano π è uguale a $\mathrm{Id} - 2P_r$ con P_r la proiezione ortogonale sulla retta r ortogonale al piano. Quindi, in entrambi i casi, basta determinare la matrice associata alla proiezione ortogonale sulla retta ortogonale al piano. Ora, la proiezione ortogonale di un vettore $\underline{v}$ su una retta $\mathrm{Span}(\underline{w})$ è data da

$$\frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{w}, \underline{w} >} \underline{w}$$

e quindi la matrice associata alla proiezione ortogonale su $\underline{w}$ è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate date da

$$\frac{< \underline{e}_j, \underline{w} >}{< \underline{w}, \underline{w} >} \underline{w}$$

Nel caso specifico abbiamo il vettore di coordinate $(1, 1, -1)$, ortogonale al primo piano, e il vettore $(1, 1, 1)$, ortogonale al secondo piano. Per le due simmetrie si trova, dopo qualche conto:

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ne segue che la matrice associata a $T := S_1 \circ S_2$ è data dal prodotto righe per colonne di queste due matrici:

$$\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ -4 & -4 & -7 \end{vmatrix}$$

Una base per π è data dai vettori $\underline{f}_1 = (1, 1, 0)$ e $\underline{f}_2 = (0, 0, 1)$. Si ha

$$T\underline{f}_1 = \frac{1}{9}(-7, -7, -8) \qquad T\underline{f}_2 = \frac{1}{9}(4, 4, -7) \ ;$$

entrambi questi vettori appartengono a π (ne soddisfano l'equazione cartesiana) che è quindi invariante per T.

Esercizio 2. Spazio euclideo $\mathcal{E}^3$. Riferimento cartesiano ortonormale $O\underline{i}\underline{j}\underline{k}$ con coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni cartesiane per la retta r passante per il punto $P(1, 0, 0)$, incidente ed ortogonale alla retta s di equazioni cartesiane $x = z = y$.

Soluzione: Sia p_1 il piano per s e per P e sia p_2 il piano per P ortogonale a s. La retta cercata può ottenersi come intersezione di questi due piani: $r = p_1 \cap p_2$. Determiniamo p_1: il piano generico per s ha equazione cartesiana $\lambda(x - z) + \mu(y - z) = 0$. Imponendo il passaggio per $P(1, 0, 0)$ otteniamo $\lambda = 0\,; \mu = 1$ (a meno di un fattore di proporzionalità non nullo) e quindi il piano $y - z = 0$. Il piano per P ortogonale ad s è $(x-1)+y+z = 0$. Mettendo a sistema i due piani si ottengono equazioni cartesiane della retta che sono quindi:

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 3. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con base canonica fissata.
(1) Dimostrare che esiste unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che ammette i vettori $\underline{w}_1 = (2,1)$ e $\underline{w}_2 = (1,2)$ come autovettori associati agli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ rispettivamente.
(2) Determinare la matrice A associata ad F nella base canonica.
(3) Determinare una matrice invertibile B tale che $B^{-1}AB$ sia diagonale
(4) Facoltativo Calcolare A^{1722}.

Soluzione.
(1). La coppia di vettori $\{(2,1),(1,2)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$; ne segue che esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che manda $(2,1)$ in $(2,1)$ e $(1,2)$ in $-(1,2)$.
(2) + (3). La matrice associata ad F nella base $\{(2,1),(1,2)\}$ è la matrice diagonale

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Per la nota formula che lega le matrici associate ad un endomorfismo in basi diverse, otteniamo subito che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^{-1} A \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Quindi

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^{-1}$$

da cui

$$A = \begin{vmatrix} 5/3 & -4/3 \\ 4/3 & -5/3 \end{vmatrix}$$

Si ha anche, ovviamente,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^{-1} A \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

e quindi $B = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$
Osservazione. Per determinare A potevamo anche procedere direttamente. Siccome

$$(1,0) = \frac{2}{3}(2,1) - \frac{1}{3}(1,2)\,, \quad (0,1) = -\frac{1}{3}(2,1) + \frac{2}{3}(1,2)$$

si ha, per linearità,

$$F(1,0) \equiv F(\frac{2}{3}(2,1) - \frac{1}{3}(1,2)) = \frac{2}{3}F(2,1) - \frac{1}{3}F(1,2) = \frac{2}{3}(2,1) + \frac{1}{3}(1,2) = (\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$$

$$F(0,1) \equiv F(-\frac{1}{3}(2,1) + \frac{2}{3}(1,2)) = -\frac{1}{3}F(2,1) + \frac{2}{3}F(1,2) = -\frac{1}{3}(2,1) - \frac{2}{3}(1,2) = (-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$$

e quindi ritroviamo che la matrice associata a F nella base canonica è

$$A = \begin{vmatrix} 5/3 & -4/3 \\ 4/3 & -5/3 \end{vmatrix}$$

(4). Si ha che

$$A^{1722} = (B\Delta B^{-1})^{1722} = B\Delta^{1722}B^{-1} = BI_3B^{-1} = BB^{-1} = I_3$$

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale delle matrici reali $M_{2\,2}(\mathbb{R})$ con base canonica

$$\{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\}$$

consideriamo l' endomorfismo F definito da

$$F(A) := \frac{A + A^T}{2}$$

(0) (Facoltativo) Verificare che la formula $< A, B >:= \mathrm{Tr}(B^T A)$ definisce un prodotto scalare definito positivo in $M_{2\,2}(\mathbb{R})$

(0.5) (Facoltativo) Verificare che F è un operatore simmetrico in $(M_{2\,2}(\mathbb{R}), <\,,\,>)$.
Suggerimento: la traccia gode della seguente notevole proprietà: $\mathrm{Tr}(CD) = \mathrm{Tr}(DC)\ \forall C, D \in M_{2\,2}(\mathbb{R})$. (La verifica è un semplice conto.)

(1) Determinare una base di $M_{2\,2}(\mathbb{R})$ costituita da autovettori per F.

Soluzione.

(0) (Facoltativo). Questo esempio è stato trattato in classe e lo trovate anche nel libro di testo. Rivediamo i dettagli e facciamo questa parte dell'esercizio direttamente sulle matrici quadrate $n \times n$. È ben noto, e comunque immediato dalla definizione, che se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora

$$(\alpha C + \beta D)^T = \alpha C^T + \beta D^T\,, \quad (C^T)^T = C\,.$$

La traccia di una matrice, $\mathrm{Tr}(C) := c_{11} + \cdots + c_{nn}$, è un'applicazione lineare da $M_{n\,n}(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ e gode della seguente ovvia proprietà: $\mathrm{Tr}(C) = \mathrm{Tr}(C^T)$. Utilizzando anche le proprietà di distributività ed omogeneità del prodotto righe per colonne scopriamo che

$$< A, B >= \mathrm{Tr}(B^T A) = \mathrm{Tr}((B^T A)^T) = \mathrm{Tr}(A^T (B^T)^T) = \mathrm{Tr}(A^T B) =< B, A > \,.$$

$$< \alpha A + \delta D, B >= \mathrm{Tr}(B^T(\alpha A + \delta D)) = \alpha \mathrm{Tr}(B^T A) + \delta \mathrm{Tr}(B^T D) = \alpha < A, B > + \delta < D, B >$$

e quindi $< A, B >= \mathrm{Tr}(B^T A)$ definisce una forma bilineare simmetrica. Dato che $< A, A >= \mathrm{Tr}(A^T A)$ e dato che

$$\mathrm{Tr}(A^T A) = ||A^1||^2 + \cdots + ||A^n||^2$$

che è positivo se A non è la matrice nulla, vediamo che $<\,,\,>$ è definito positivo.

Osservazione. Nel caso in esame, quello delle matrici 2×2, potevate anche fare il calcolo diretto:

$$\mathrm{Tr}(B^T A) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

e da qui tutto segue in maniera molto semplice.

(0.5) (Facoltativo) Si ha

$$< F(A), B >=< \frac{A + A^T}{2}, B >= \frac{1}{2}(< A, B > + < A^T, B >) = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(B^T A) + \mathrm{Tr}(B^T A^T))$$

mentre

$$< A, F(B) >= \frac{1}{2}(< A, B > + < A, B^T >) = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(B^T A) + \mathrm{Tr}((B^T)^T A)) = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(B^T A) + \mathrm{Tr}(BA))$$

ed è sufficiente dimostrare che

$$\mathrm{Tr}(B^T A^T) = \mathrm{Tr}(BA)$$

Ma

$$\mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(BA)^T = \mathrm{Tr}\, A^T B^T = \mathrm{Tr}\, B^T A^T$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la proprietà della traccia data nel suggerimento (e cioè che $\mathrm{Tr}(CD) = \mathrm{Tr}(DC)$).

(1). L'applicazione F agisce su una matrice 2×2 nel seguente modo:

$$F(\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}) = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{2}(y+z) \\ \frac{1}{2}(y+z) & w \end{vmatrix}$$

Applicando questa formula alle 4 matrici della base canonica scopriamo che la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica di $M_{22}(\mathbb{R})$ è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ne segue che il polinomio caratteristico di F è

$$p_F(t) = \det \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2-t & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = t(t-1)^3$$

L'applicazione F ha dunque autovalori $t = 1$ con molteplicità algebrica 3, e $t = 0$ con molteplicità algebrica 1. Una base dell'1-autospazio di F è costituita dalle tre matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Una base dello 0-autospazio di F è costituita dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Queste 4 matrici sono quindi una base di $M_{2\,2}(\mathbb{R})$ costituita da autovettori per F.

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica fissata. Consideriamo la forma bilineare simmetrica

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = 4x_1y_1 + 5x_2y_2 + 5x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2\,.$$

(1) Scrivere $b(\underline{x}, \underline{y})$ nella forma $\underline{y}^T A\underline{x}$ per un'opportuna matrice simmetrica A. Scrivere l'espressione $\phi(\underline{x})$ della forma quadratica associata.
(2) Verificare che $b(\,,\,)$ è *definita positiva* e che definisce quindi in $\mathbb{R}^3$ un prodotto scalare definito positivo che denotiamo con $<\,,\,>$.
Consideriamo lo spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^3, <\,,\,>)$. (Attenzione: $<\,,\,>$ non è il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$.) Consideriamo il sottospazio

$$U := \mathrm{Span}(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix})$$

(3) Determinare una base ortogonale di U, sia essa $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$, con la proprietà che $\underline{w}_1 = (0, 1, 0)$. Determinare poi una base di $U^\perp$.

Soluzione.
(1) È subito visto che $b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A\underline{x}$ con

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Per definizione $\phi(\underline{x}) = b(\underline{x}, \underline{x})$ e quindi $\phi(\underline{x}) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2x_3$.
(2) Il polinomio caratteristico di A è $P_A(\lambda) = -(\lambda - 4)[\lambda^2 - 10\lambda + 24]$ che si fattorizza immediatamente in $-(\lambda - 4)^2(\lambda - 6)$. Dato che gli autovalori di A sono tutti positivi deduciamo tramite il teorema di Sylvester che b è definita positiva.
(3) Applicando la definizione vediamo che

$$< \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} >= 1$$

e quindi i due generatori di U non sono ortogonali per il prodotto scalare definito positivo $<\,,\,>$. Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt ai due vettori generatori, scegliendo $(0, 1, 0)$ come primo vettore. Consideriamo allora $\underline{w}_1 := (0, 1, 0)$ e

$$\underline{w}_2 := \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} - \frac{< \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} >}{< \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} >} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Applicando la definizione scopriamo che $< \underline{w}_1, \underline{w}_1 >= 5$ e quindi

$$\underline{w}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} - \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1/5 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Il sottospazio $U^\perp$ è, per definizione,

$$U^\perp = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid < \underline{x}, \underline{u} >= 0\, \forall \underline{u} \in U\}$$

Per bilinearità

$$U^\perp = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid < \underline{x}, \underline{w}_1 >= 0 \text{ e } < \underline{x}, \underline{w}_2 >= 0\}$$

e quindi, dopo un conto elementare, vediamo gli elementi di $U^\perp$ soddisfano le due equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 5x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema troviamo che $U^\perp$ (che sappiamo avere dimensione $3-2=1$) è generato dal vettore di coordinate $(6, 1, 5)$.

Osservazione. In alternativa potevamo considerare la base di $\mathbb{R}^3$ costituita da $\{\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}\}$ più un terzo vettore non appartenente al piano U. Il procedimento di Gram-Schmidt applicato a questa base fornisce i due vettori ortogonali $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ di U già trovati più un terzo vettore $\underline{w}_3$ che deve necessariamente essere un generatore per la retta $U^\perp$.