Geometria

Canale 3. Lettere J-PE (Prof P. Piazza)

Secondo esonero. Compito A.

23/01/2014

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Orale (cerchiare l'appello più probabile):

I orale (31/1/14) **II orale (14/2/14)**

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6+1	
2	6	
3	6	
4	6	
5	7+1	
Totale	31+2	

ATTENZIONE: : **giustificate le vostre argomentazioni !**

Esercizio 1. Spazio vettoriale metrico $\mathbb{R}^3$ con prodotto scalare canonico.
Determinare la matrice associata nella base canonica all'operatore di proiezione ortogonale sul piano π di equazione cartesiana $x_1 - x_3 = 0$.
Facoltativo. Determinare la matrice associata nella base canonica all'operatore di simmetria ortogonale rispetto alla retta $\pi^\perp$

Soluzione.
Sia $\mathcal{E}$ la base canonica. Denotiamo con r la retta vettoriale ortogonale al piano dato. È la retta $\mathbb{R}(1, 0, -1)$. Se denotiamo con P_π e P_r le proiezioni ortogonali su π e r e con S_π e S_r le simmetrie ortogonali rispetto a π e r allora sappiamo che

$$P_\pi + P_r = \mathrm{Id}\,, \quad S_r = \mathrm{Id} - 2P_\pi\,, \quad S_\pi = \mathrm{Id} - 2P_r\,.$$

Queste relazioni discendono direttamente dalle definizioni. È quindi sufficiente (e più rapido) determinare la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(P_r)$ associata a P_r nella base canonica, perché poi avremo

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(P_\pi) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id} - P_r) = I_3 - M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(P_r)$$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(S_r) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id} - 2P_\pi) = I_3 - 2M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(P_\pi)$$

Sia $\underline{u}$ un versore di r: ad esempio $\underline{u} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$. Per determinare la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(P_r)$ associata a P_r nella base canonica basta calcolare $P_r(\underline{e}_j) =< \underline{e}_j \underline{u} > \underline{u}$ per $j = 1, 2, 3$ e inserirlo nella j-ma colonna. Otteniamo

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(P_r) = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}$$

da cui

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(P_\pi) = I_3 - \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}$$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(S_r) = I_3 - 2\begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Risposta:

Esercizio 2. Sia $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ con coordinate associate (x, y, z). Si dia un'equazione cartesiana del piano che contiene il punto $P(1, 2, 3)$ ed è perpendicolare alla retta r definita dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

Soluzione:
Sia $ax+by+cz+d = 0$ l'equazione del piano cercato. Sappiamo che i coefficienti (a, b, c) sono proporzionali ai parametri direttori della retta ortogonale, che è data nel testo dell'esercizio. I parametri direttori di r sono $(4, -5, -1)$ e quindi il nostro piano va cercato fra i piani del fascio improprio:

$$4x - 5y - z + d = 0\,.$$

Imponendo il passaggio per il punto $P(1, 2, 3)$ si trova $d = 9$. L'equazione cercata è quindi

$$4x - 5y - z + 9 = 0\,.$$

Risposta:

Esercizio 3. Sia $u \in \mathbb{R}$ e sia A_u la matrice

$$A(u) := \begin{vmatrix} 1 & u/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & u & 1 \end{vmatrix}$$

Sia $T_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $A(u)$: $T_u := L_{A(u)}$. Studiare la diagonalizzabilità di T_u al variare di $u \in \mathbb{R}$.

Soluzione:
Il polinomio caratteristico di A_u è $(2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$ che ha radici $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica 1. Per l'autovalore λ_2 sappiamo che la molteplicità algebrica è necessariamente uguale a quella geometrica (perché $1 \leq m_g(\lambda_2)$; $m_g(\lambda_2) \leq m_a(\lambda_2) = 1$ e quindi $m_g(\lambda_2) = m_a(\lambda_2) = 1$). Possiamo quindi concentrarci sull'autovalore $\lambda_1 = 2$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$ è dato da $\mathrm{Ker}(A_u - 2I_3)$. Ma

$$A_u - 2I_3 = \begin{vmatrix} -1 & u/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & u & -1 \end{vmatrix}$$

La dimensione dell'autospazio V_2 è quindi uguale a $3 - r_u$ con r_u uguale al rango di questa matrice. Questa dimensione è quindi uguale a 2, che è la molteplicità algebrica dell'autovalore, se e solo se r_u è uguale a 1. Tuttavia, è semplice verificare che $r_u = 1$ se e solo se $u = 0$. Quindi, la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale alla sua molteplicità geometrica se e solo se $u = 0$. La conclusione è che T_u è diagonalizzabile se e solo se $u = 0$.

Risposta:

Esercizio 4. Consideriamo lo spazio vettoriale metrico $(\mathcal{V}_O, <\,,\,>)$, con $<\underline{v},\underline{w}> = \ell(\underline{v})\ell(\underline{w})\cos(\widehat{\underline{v}\,\underline{w}})$. Fissiamo una base ortonormale $\{\underline{i},\underline{j},\underline{k}\}$ e l'orientazione da essa definita. Sia $\underline{u}$ il vettore di coordinate

$$(1,0,1).$$

Sia $T : \mathcal{V}_\mathcal{O} \to \mathcal{V}_\mathcal{O}$ l'applicazione definita da

$$T(\underline{v}) = \underline{v} - <\underline{v},\underline{u}>\underline{u} + \underline{u}\wedge\underline{v}\,.$$

(1) Spiegare perché T è *lineare*.
(2) Determinare la matrice associata a T nella base $\{\underline{i},\underline{j},\underline{k}\}$
(3) Stabilire se T è un'isometria.

Soluzione.
T è lineare. Infatti, tenendo conto che il prodotto scalare è bilineare e che il prodotto vettoriale è anche bilineare abbiamo

$$\begin{aligned}
T(\underline{v}+\underline{v}') =& \underline{v}+\underline{v}' - <\underline{v}+\underline{v}',\underline{u}>\underline{u} + \underline{u}\wedge(\underline{v}+\underline{v}')\\
=& \underline{v}+\underline{v}' - <\underline{v},\underline{u}>\underline{u} - <\underline{v}',\underline{u}>\underline{u} + \underline{u}\wedge\underline{v} + \underline{u}\wedge\underline{v}'\\
=& (\underline{v} - <\underline{v},\underline{u}>\underline{u} + \underline{u}\wedge\underline{v}) + (\underline{v}' - <\underline{v}',\underline{u}>\underline{u} + \underline{u}\wedge\underline{v}')\\
=& T(\underline{v}) + T(\underline{v}').
\end{aligned}$$

Analogamente si procede per $T(\lambda\underline{v}) = \lambda T(\underline{v})$.
Per determinare la matrice associata a T nella base ortonormale fissata basta calcolare $T(\underline{i})$, $T(\underline{j})$ e $T(\underline{k})$. Tenendo conto che $\underline{u} = \underline{i}+\underline{k}$ si ha

$$\begin{aligned}
T(\underline{i}) &= \underline{i} - <\underline{i},\underline{i}+\underline{k}>(\underline{i}+\underline{k}) + (\underline{i}+\underline{k})\wedge\underline{i} = \underline{i} - (\underline{i}+\underline{k}) + \underline{k}\wedge\underline{i} = -\underline{k}+\underline{j} \equiv \underline{j}-\underline{k}\\
T(\underline{j}) &= \underline{j} - <\underline{j},\underline{i}+\underline{k}>(\underline{i}+\underline{k}) + (\underline{i}+\underline{k})\wedge\underline{j} = \underline{j} - \underline{0} + (\underline{i}+\underline{k})\wedge\underline{j} = \underline{j}+\underline{k}-\underline{i} \equiv -\underline{i}+\underline{j}+\underline{k}\\
T(\underline{k}) &= \underline{k} - <\underline{k},\underline{i}+\underline{k}>(\underline{i}+\underline{k}) + (\underline{i}+\underline{k})\wedge\underline{k} = \underline{k} - (\underline{i}+\underline{k}) + \underline{i}\wedge\underline{k} = -\underline{i}-\underline{j}
\end{aligned}$$

Queste relazioni seguono subito dalla formula in coordinate per il prodotto vettoriale. Di fatto anche senza formula ma solo con la definizione di prodotto vettoriale (ed un pó di ginnastica con le dita) era possibile fare questi calcoli.
Ne segue che la matrice associata a T nella base ortonormale fissata è

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

e dato che questa matrice, la matrice associata a T in una base ortonormale, *non* è ortogonale, concludiamo che T *non* è un'isometria.

Osservazione: non si poteva rispondere ad **(1)** dando la definizione di linearità di un'applicazione T; occorreva dimostrare la linearità di questa particolare applicazione.

Risposta:

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita dalla formula

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = 3x_1y_1 - 5x_1y_3 - 5x_3y_1 - 2x_2y_2 + 3x_3y_3\,.$$

(1) Spiegare perché b definisce una forma bilineare simmetrica. Stabilire se b è degenere o non-degenere.
(2) Calcolare indice di positività e negatività.
(3) Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi la forma bilineare simmetrica b.
Facoltativo. Determinare equazioni cartesiane per un sottospazio U di dimensione 2 con la proprietà che la restrizione di b ad U sia definita negativa.

Soluzione. L'applicazione $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare simmetrica perché è possibile esprimerla nella forma $b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A\underline{x}$ con A la matrice simmetrica

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

(questa è anche la matrice associata a $b(\ ,\ )$ nella base canonica). Osservando che il prodotto $\underline{y}^T A\underline{x}$ è un numero reale per ogni fissato $\underline{x}$, $\underline{y}$ si ha :

$$\underline{y}^T A\underline{x} = (\underline{y}^T A\underline{x})^T = \underline{x}^T A^T (\underline{y}^T)^T = \underline{x}^T A\underline{y}$$

da cui $b(\underline{x}, \underline{y}) = b(\underline{y}, \underline{x})$. La bilinearità di $\underline{y}^T A\underline{x}$ segue dalle proprietà del prodotto righe per colonne. Riassumendo: abbiamo verificato che b definisce una forma bilineare simmetrica. Ovviamente era anche possibile fare una verifica diretta.

Osservazione: per rispondere ad **(1)** non era sufficiente dare la definizione generale di forma bilineare simmetrica.

La matrice associata a b nella base canonica ha determinante diverso da zero; ne segue che b è non degenere. Per determinare gli indici di positività e negatività calcoliamo gli autovalori dell'operatore simmetrico associato, L_A. Sviluppando il determinante di $A - \lambda I_3$ secondo la seconda colonna otteniamo subito

$$P_A(\lambda) = -(2+\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda - 16)$$

e quindi gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 8\,, \quad m_a(8) = 1\,, \qquad \lambda_2 = -2\,, \quad m_a(-2) = 2$$

da cui otteniamo indice di positività uguale ad 1 ed indice di negatività uguale a 2. Sappiamo infine che se $\mathcal{W}$ è una base *ortonormale* di autovettori per L_A allora $A_b^{\mathcal{W}}$ è uguale a

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$b(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = 0 \ \text{se}\, i \neq j\,; \quad b(\underline{w}_1, \underline{w}_1) = 8\,, \ \ b(\underline{w}_2, \underline{w}_2) = b(\underline{w}_3, \underline{w}_3) = -2\,.$$

La base $\mathcal{W}$ è quindi diagonalizzante per b.
Per determinare la base ortonormale di autovettori determiniamo V_{-2}, che è il nucleo di $A + 2I_3$. Un rapido calcolo mostra che il nucleo di $A + 2I_3$ è il sottospazio di equazione cartesiana $x_1 - x_3 = 0$ e che una sua base ortonormale è data da

$$\underline{w}_2 := (0,1,0)\,, \qquad \underline{w}_3 := (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

L'autospazio relativo all'autovalore 8 è semplicemente la retta $(V_{-2})^{\perp}$; dall'equazione di V_{-2} otteniamo

$$V_8 = \mathbb{R}\underline{w}_1 \equiv \mathbb{R}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})\,.$$

È chiaro che la restrizione di b a V_{-2} è definita negativa.

Osservazione. Sia $\mathcal{G}$ una base *ortogonale* di autovettori per L_A. Cosa possiamo dire su $A_b^{\mathcal{G}}$? Ebbene, anche questa matrice è diagonale. Infatti: sappiamo che se D è la matrice che ha come colonne le coordinate degli autovettori $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2 \underline{g}_3\}$ allora

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = D^{-1}AD$$

Non è vero che $D^T = D^{-1}$, e cioè che $D^T D = I_3$; non possiamo quindi concludere, senza un ulteriore ragionamento, che $D^T AD$ sia diagonale. Tuttavia sappiamo che $D^T D$ è la matrice che ha al posto ij il prodotto scalare della colonna D^i con la colonna D^j; questo è il prodotto scalare di $\underline{g}_i$ con $\underline{g}_j$. Vediamo quindi che

$$D^T D = \begin{vmatrix} ||\underline{g}_1||^2 & 0 & 0 \\ 0 & ||\underline{g}_2||^2 & 0 \\ 0 & 0 & ||\underline{g}_3|| \end{vmatrix}$$

perché $\mathcal{G}$ è base ortogonale. Ma allora

$$\begin{aligned} A_b^{\mathcal{G}} = D^T AD = (D^T D)(D^{-1}AD) &= \begin{vmatrix} ||\underline{g}_1||^2 & 0 & 0 \\ 0 & ||\underline{g}_2||^2 & 0 \\ 0 & 0 & ||\underline{g}_3||^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} ||\underline{g}_1||^2 8 & 0 & 0 \\ 0 & ||\underline{g}_2||^2(-2) & 0 \\ 0 & 0 & ||\underline{g}_3||^2(-2) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

e vi faccio notare che i segni di questa matrice diagonale sono gli stessi di quelli della matrice di autovalori.
Conclusione: la base ortogonale $\mathcal{G}$ è anche diagonalizzante perché

$$b(\underline{g}_i, \underline{g}_j) = 0 \ \text{se}\, i \neq j\,; \quad b(\underline{g}_1, \underline{g}_1) = 8||\underline{g}_1||^2\,, \ \ b(\underline{g}_2, \underline{g}_2) = -2||\underline{g}_2||^2\,, \ \ b(\underline{g}_3, \underline{g}_3) = -2||\underline{g}_3||^2\,.$$

Questo ragionamento potete farlo in tutta generalità (con il che ho risposto ad una domanda alla quale avevo dato una risposta troppo rapida).

Risposta: